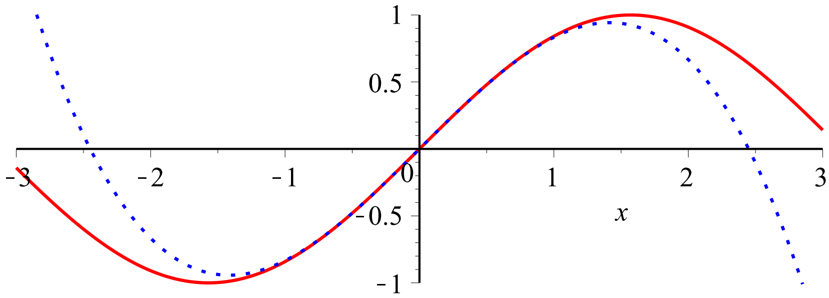
Taylor-polynomier

John V Petersen

$$T_n(f(x)) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$



Taylor-polynomier

art-science-soul

Indhold

1. Indledning 4

2. Udledning af Sætning om Taylor polynomiet 4

3. Sætning og Definition af Taylor polynomiet 7

4. eks. 1 Taylorpolynomium 8

5. eks. 2 Taylorpolynomium 9

6. eks. 3 og 4 viser anvendelse af Taylorpolynomier i fysik 10

Taylor-polynomier

Vi starter med at se på en konkret problemstilling. Vi ved, at tangenten til grafen $y = f(x)$ i punktet a er den rette linje som smyger sig bedst indtil grafen i nærheden af a. Linjen berører grafen i netop et punkt. Desuden har tangenten og kurven samme hældning i deres fælles berøringspunkt. Er vi tilstrækkelig nær a, er det næsten umuligt at se forskel på grafen og tangenten. Men går vi et lidt væk fra a, kan forskellen være stor (se fig. 1).

Spørgsmålet er nu: Kan vi finde enkle kurver som følger grafen tæt over et større område ?

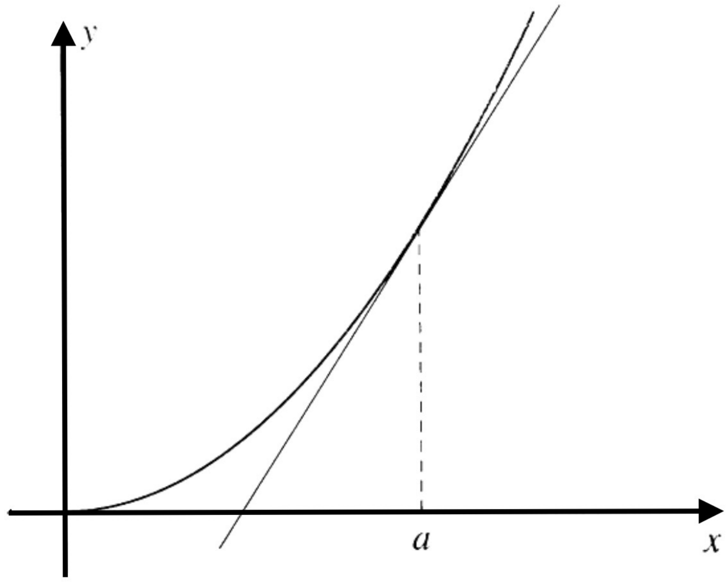


fig. 1

Først må vi præcisere hvad vi mener med "enkle kurver". En ret linje er grafen for et førstegradspolynomium, så tangenten er oplagt den bedste førstegradskurve vi kan finde. Men hvad med andengradskurver - måske vi kan finde en kurve af anden grad, som følger grafen bedre end tangenten gør ? Hvilken andrengradskurve skulle det i så fald være ?
Husk, at tangenten lægger sig så godt ind til grafen, fordi den har samme funktionsværdi og stigningstal, hældning i a, som grafen selv. Grunden til, at den ikke følger grafen over et større område, er at grafen krummer, mens linjen er ret. Hvis vi kan finde en andengradskurve som krummer lige så meget som grafen i punktet a, vil den sandsynligvis følge grafen bedre end tangenten gør. Det enkleste mål for krumning er den anden afledede. Vi søger derfor et andengradspolynomium, som har samme funktionsværdi, føste afledede og anden afledede, som den oprindelige graf.

Hvad betyder det i praksis ? En generel andengradsfunktion har formen

$$g(x) = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2$$

hvor c_0, c_1 og c_2 er konstanter.

Differentierer vi, får vi

$$g'(x) = c_1 + 2c_2(x-a)$$

$$g''(x) = 2c_2$$

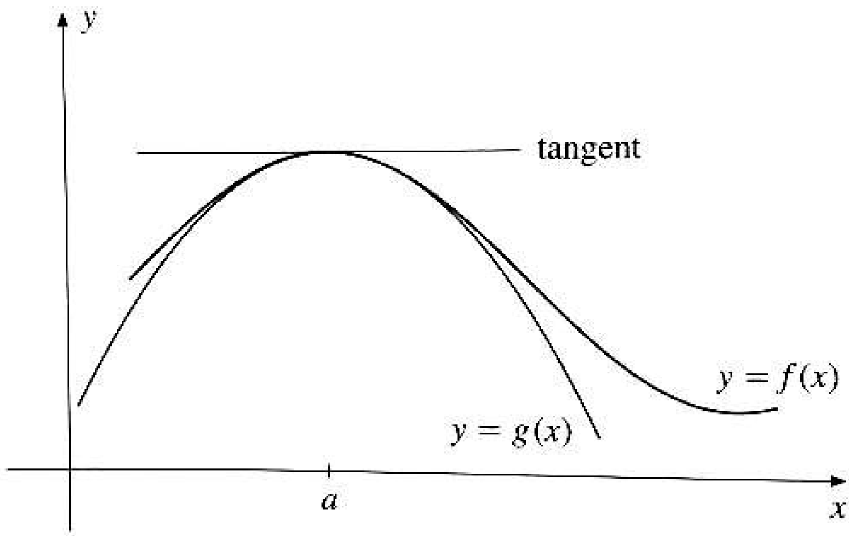


fig. 2

I punktet $x = a$, har vi derfor

$$g(a) = c_0, \qquad g'(a) = c_1, \qquad g''(a) = 2c_2$$

Skal disse værdier være lig med henholdsvis $f(a)$, $f'(a)$ og $f''(a)$, får vi

$$c_0 = f(a), \qquad c_1 = f'(a) , \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

Andengradsfunktionen bliver dermed

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Grafen for dette polynomium er altså den andengradskurve som smyger sig bedst ind til grafen for $y = f(x)$ i nærheden af a . fig. 2 viser grafen for f(x) , tangenten i $x = a$ og andengradskurven $y = g(x)$. Vi ser, at andengradskurven giver en langt bedre tilnærmelse end tangenten.

Ideen ovenfor er let at generalisere. Det n-te gradspolynomium $h(x)$ som passer best til grafen $y = f(x)$ i nærheden af a , er det som har den samme funktionsværdi og de samme n første afledede som f i punktet a . Da et n-te gradspolynomium kan skrives på formen

$$h(x) = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \cdots + c_n (x - a)^n$$

skal vi blot bestemme koefficienterne c_0 , c_1 , c_2 , ... , c_n . mht. notationen gælder der, at $f^{(n)}$ er den n-te afledede til f . Den nulte afledede $f^{(0)}$ er f selv.

Differentierer vi nu $h(x)$, får vi

$$h'(x) = c_1 + 2\,c_2 (x - a) + 3\,c_3 (x - a)^2 + \cdots + n\,c_n (x - a)^{n-1}$$

$$h''(x) = 2\,c_2 + 2\cdot 3\,c_3 (x - a) + \cdots + (n - 1)\,n\,c_n (x - a)^{n-2}$$

$$h'''(x) = 2\cdot 3\,c_3 + 2\cdot 3\cdot 4\,c_4 (x - a) + \cdots + (n - 2)(n - 1)\,n\,c_n (x - a)^{n-3}$$

... ...

$$h^{(k)}(x) = k!\cdot c_k + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (k+1)!\,c_{k+1} (x - a) + \cdots$$

$$+ (n - k + 1)(n - k + 2)\,n\,c_n (x - a)^{n-k}$$

... ...

$$h^{(n)}(a) = n!\cdot c_n$$

Sætter vi $x = a$ ind, ser vi at

$$h(a) = c_0 ,\quad h'(a) = c_1 ,\quad h''(a) = 2\,c_2 ,\qquad h'''(a) = 6\,c_3 ,\ \ldots ,$$

$$h^{(k)}(a) = k!\cdot c_k ,\ \ldots ,\ h^{(n)}(a) = n!\cdot c_n$$

Disse værdier skal altså være lig med henholdsvis

$$f(a) ,\ f'(a) \ \text{ og } \ f''(a) ,\ f'''(a) ,\ \ldots ,\ f^{(k)}(a) ,\ \ldots ,\ f^{(n)}(a) .$$

Det giver $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \dfrac{f''(a)}{2}$, $c_3 = \dfrac{f'''(a)}{6}$, ... , $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$,

... , $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Polynomiet vi leder efter, er altså

$$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + ...$$

$$+ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Dermed har vi vist:

Sætning 1 Antag at f er n gange differentiabel i punktet a . Så er polynomiet

$$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + ...$$

$$+ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

det n-te gradspolynomium som har samme funktionsværdi og de samme n første afledede som f i punktet a .

Definition 2 Polynomiet ovenfor i sætning 1 kaldes *Taylorpolynomiet* til f af grad n omkring punktet a .

Vi betegner det med $T_n f$

$$T_n f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Vær opmærksom på at man bruger flere betegnelser for Taylorpolynomier - Taylorrækker og Rækkeudviklinger er almindelig brugte betegnelser.

Eks. 1

Vi vil bestemme både det tredie $T_3 f$ og det fjerde $T_4 f$ Taylorpolynomium for Sinusfunktionen *Sin(x)* med udviklingspunkt $a = 0$. Vi finder, når $f(x) = Sin(x)$, at

$$f'(x) = Cos(x), \quad f''(x) = -Sin(x), \quad f'''(x) = -Cos(x), \quad f^{(4)}(x) = Sin(x).$$

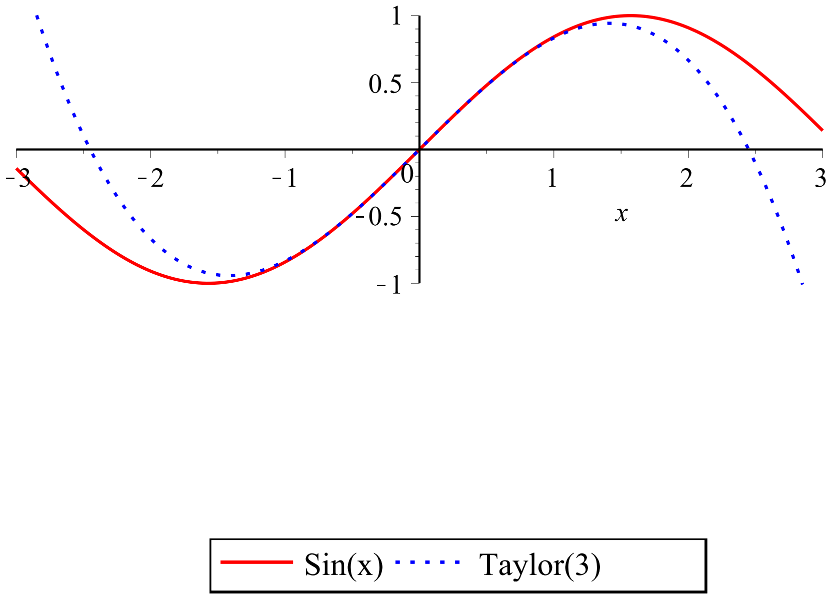
Hermed har vi

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Altså har vi

$$T_3 f\ (x) = f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\, x^3 = x - \frac{x^3}{3!} \ .$$

og da $f^{(4)}(0) = 0$, har vi $T_4 f = T_3 f$.



Eks. 2

Vi vil bestemme det 2. Taylorpolynomium $T_2 f$ udviklingspunkt $a = 1$

for funktionen $f(x) = x^2 \ln(x)$.

Vi finder

$$f'(x) = 2\,x \ln(x) + x \quad \text{og} \quad f''(x) = 2 \ln(x) + 3$$

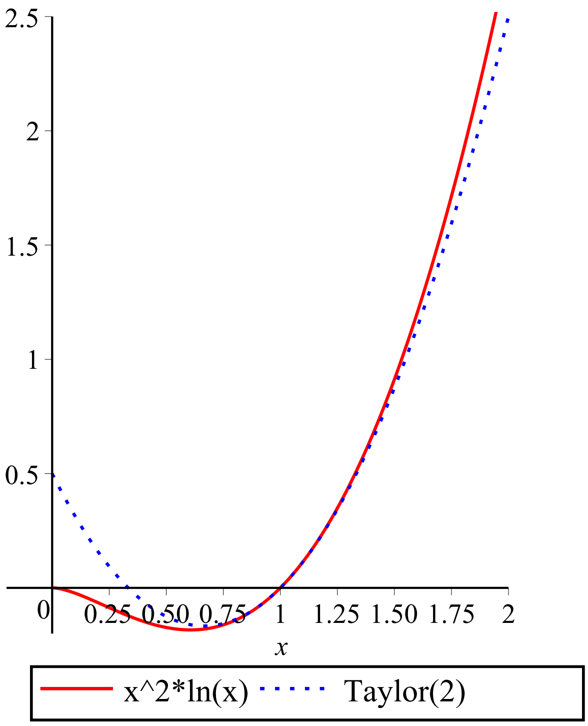
Altså har vi

$$f(1) = 0\,, \quad f'(1) = 1\,, \quad f''(1) = 3\,.$$

Taylorpolynomiet $T_2 f$ er dermed givet ved forskriften

$$T_2 f\,(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{1}{2}\,f''(1)\,(x-1)^2$$

$$= (x-1) + \frac{3}{2}\,(x-1)^2$$



Eks. 3

Dette eksempel viser anvendelse af Taylorudviklinger i fysik:

Rækkeudvikling af Gammafaktoren i Einsteins specielle relativitetsteori

Rækkeudvikling af gammafaktoren

Eks. 4

Dette eksempel viser også anvendelse af Taylorudviklinger i fysik.

Her undersøger vi om inertiens lov , med tilnærmelse, gælder i et koordinatsytem med centrum i Solen , og faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse.

Rækkeudvikling - Inertialsystem