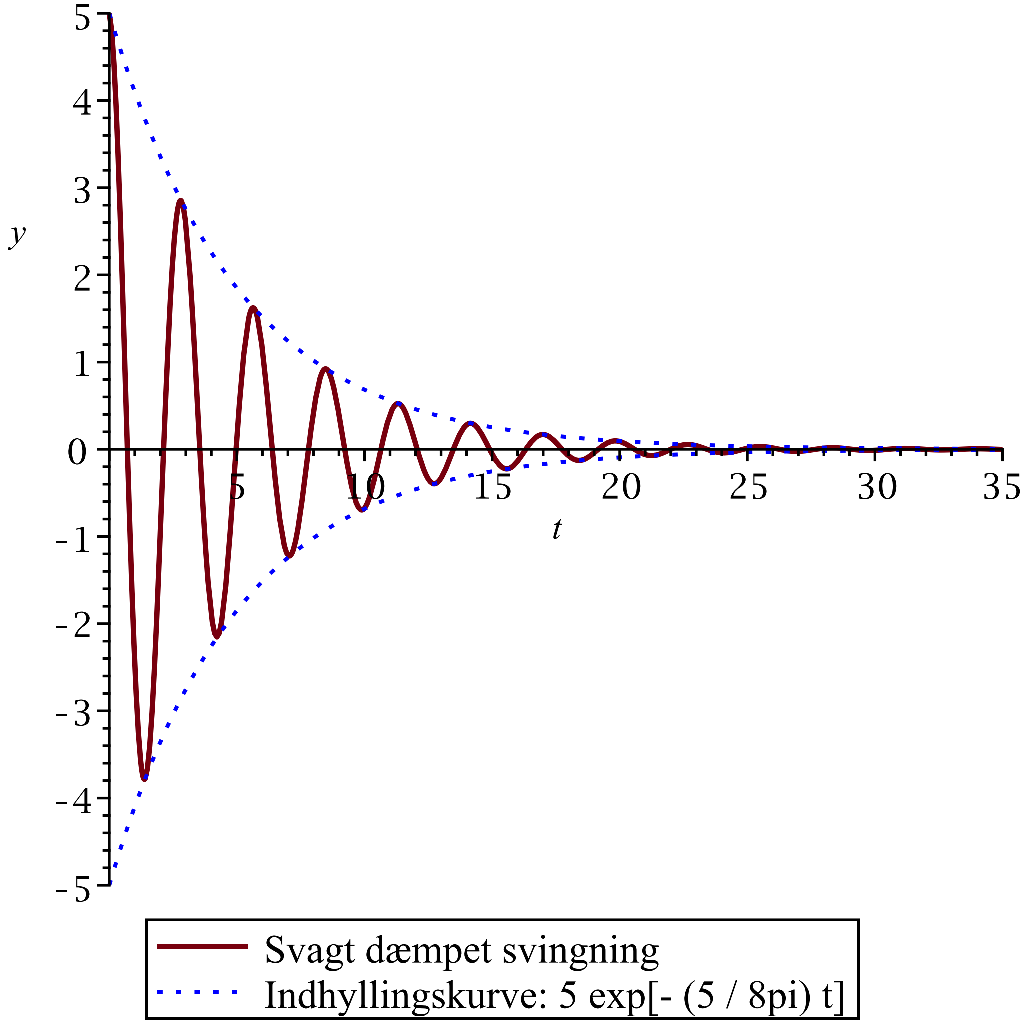
Svagt dæmpet svingning

John V Petersen



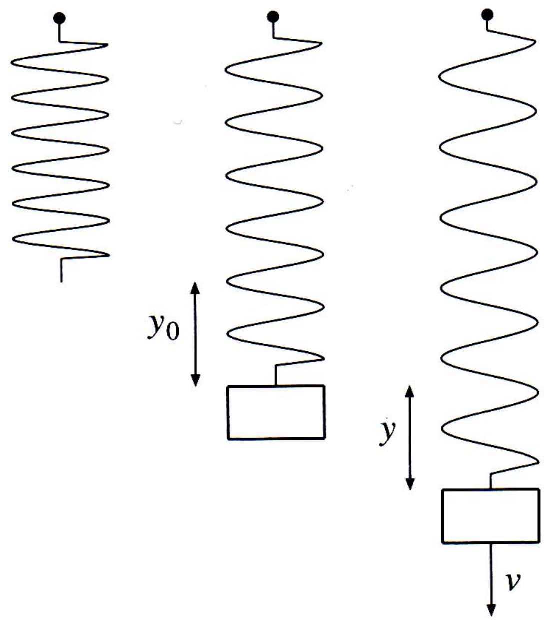
Svagt dæmpet svingning

art-science-soul.dk

ode.dk

Indhold

Dæmpet svingning



Vi ser på fjederen med en masse m, loddet.
Fjederen er så let i forhold til massen m, at vi ser bort fra fjedermassen.

Vi trækker loddet ud fra ligevægtsstillingen
(hvor det hænger i ro), og lader det så udføre dæmpede svingninger.

Så opskriver vi de kræfter der virker på loddet og opstiller derved den tilhørende differentialligning,
og finder den endelige bevægelsesligning,

Nulpunktet for svingningen er valgt ved systemets hvileposition.
Så kan tyngdekraften udelades, da den udlignes af fjederkraften F_{fjeder} i hvilepositionen.

Vi betragter en dæmpningskraft, der er proportional med legemets hastighed

$$F_{damp} = \alpha \cdot v$$

Dæmpningskonstanten α afhænger bl.a. af legemets størrelse og form.

Vi anvender Newtons 2. lov på systemet

$$F_{res} = F_{fjeder} - F_{damp} \quad \Leftrightarrow$$

$$m \cdot a = -k \cdot y - \alpha \cdot v \qquad (1) \qquad\qquad k \text{ er fjederkonstanten}$$

Når dæmpningskonstanten α er tilstrækkelig lille, vil systemet udføre **svagt dæmpede svingninger**. Vi skal senere se, at det sker **når $\boldsymbol{\alpha < 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$.**

Sammenhængen mellem sted-, hastigheds- og accelerationsfunktionerne er:

$$v(t) = y'(t)$$

$$a(t) = y''(t)$$

Vi indsætter i (1) og får

$$m \cdot y''(t) + \alpha \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0 \qquad (2)$$

Vi skal løse differentialligningen (2)

Vi antager, at en løsning til (2) er af formen $y(t) = e^{\lambda \cdot t}$

$$y'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

indsættes i (2)

$$y''(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$m \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} + \alpha \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + k \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} + \frac{\alpha}{m} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} + \frac{k}{m} \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m} \cdot \lambda + \frac{k}{m} = 0 \qquad (3)$$

Den karakteristiske ligning (3) har rødderne

$$\lambda = \frac{\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4 \cdot k \cdot m}\right)}{2 \cdot m}$$

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2\,m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\,m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Diskriminanten $d = \alpha^2 - 4 \cdot k \cdot m < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 < 4 \cdot k \cdot m \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}$

to komplekst konjugerede rødder.

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2\,m} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2\,m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2\,m} \pm \boldsymbol{i} \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2\,m}\right)^2}$$

Den karakteristiske ligning (3) har so to komplekse rødder:

R: realdel $\quad -\frac{\alpha}{2\,m}$

I: imaginærdel $\quad \pm \boldsymbol{i} \cdot \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2\,m}\right)^2}$

Løsningen til (2) er:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2\,m} \cdot t} \left[C \cdot Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2\,m}\right)^2} \cdot t\right) + \mathrm{D} \cdot Sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2\,m}\right)^2} \cdot t\right)\right]$$

der også kan skrives på faseform:

$$y(t) = A \cdot e^{-\frac{\alpha}{2m} \cdot t} \cdot Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} \cdot t + \varphi\right) \qquad (5)$$

hvor $A = \sqrt{C^2 + D^2}$, og φ er givet ved

$$Sin(\varphi) = \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}} \qquad \text{og} \qquad Cos(\varphi) = \frac{D}{\sqrt{C^2 + D^2}}$$

som følger af:

$$C \cdot Cos(b \cdot y) + D \cdot Sin(b \cdot y) = A \cdot Sin(b \cdot y + \varphi) = A \cdot Cos(b \cdot y + \varphi)$$

□

Her er et **eksempel på en dæmpet svingning**:

Et lod med en masse $m = 3.0 \cdot 10^{-2}\ kg$ svinger i en fjeder med fjederkonstanten $k = 5.0\ \frac{N}{m}$.

Loddet påvirkes samtidig af en dæmpningskraft $F_{dæmp} = 0.25\ \frac{N}{\frac{m}{s}} \cdot v$.

Tidligere så vi, at systemet vil udføre **svagt dæmpede svingninger når** $\boldsymbol{\alpha < 2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$ **.**

Da alle enheder er i SI enheder kan vi blot tage talværdierne og udregne $\boldsymbol{\alpha}$ og $\boldsymbol{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$.

$\boldsymbol{\alpha} = 0.25$ og $\boldsymbol{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}} = 2 \cdot \sqrt{5.0 \cdot 3.0 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot \sqrt{0.15} = 0.774596.. \approx 0.77$

dvs. $\boldsymbol{\alpha} = 0.25 < 0.77 = \boldsymbol{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$

Så systemets fysiske værdier opfylder, at det vil udføre svagt dæmpede svingninger.

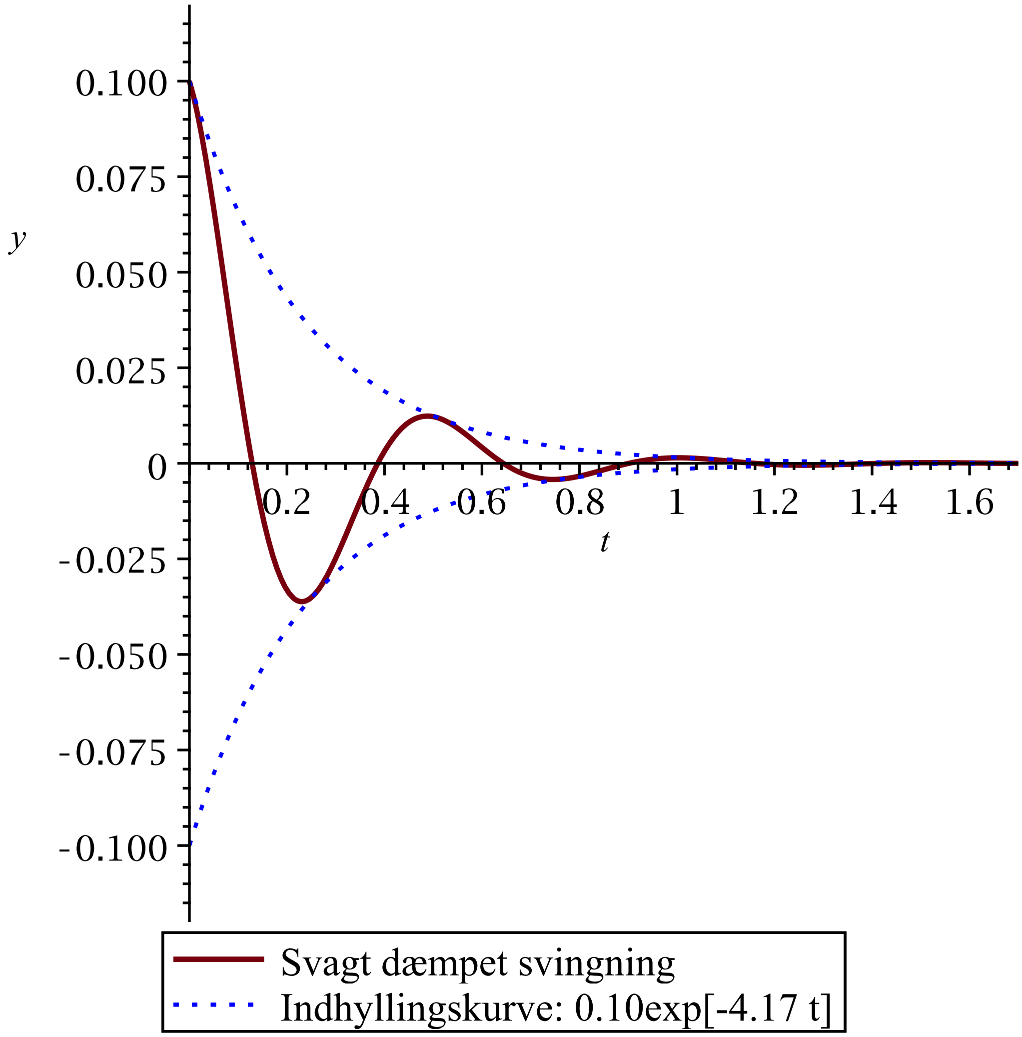
Stedfunktionen $x(t)$ for loddets bevægelse opskrives, når loddet trækkes $10\ cm = 0.10\ m$ fra ligevægtsstillingen og slippes til tiden $t = 0$.

$$x(t) = 0.10 \cdot e^{-\frac{0.25}{2 \cdot 3.0 \cdot 10^{-2}} \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{5.0}{3.0 \cdot 10^{-2}} - \frac{0.25^2}{4 \cdot (3.0 \cdot 10^{-2})^2}} \cdot t\right)$$

$$x(t) = 0.10 \cdot e^{-4.166 \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{149.299} \cdot t\right)$$

$$x(t) \approx 0.10 \cdot e^{-4.17 \cdot t} \cdot \cos(12.2 \cdot t)$$

Stedgrafen for funktionen plottes her nedenfor


0.100
0.075
0.050
0.025
0
-0.025
-0.050
-0.075
-0.100
y
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
t
Svagt dæmpet svingning
Indhyllingskurve: 0.10exp[-4.17 t]

Appendiks

Dæmpede svingninger - tilnærmelse til Harmonisk Oscillator

En **harmonisk oscillator** er i fysik et oscillerende system, hvor **kraften er proportional med afvigelsen** fra systemets ligevægtsposition.
Kendte eksempler er et svingende lod, der hænger i en fjeder eller et pendul, der svinger frem og tilbage: $F=-kx$

Oscillationen siges at være harmonisk, når den beskrives ved en sinuskurve med en konstant periode. En sådan ideel bevægelse spiller en meget vigtig rolle i klassisk mekanik, elektriske kredsløb og i kvantemekanik.
I mange tilfælde vil svingningsperioden ikke være konstant, men vil i stedet stige med tiden. For et mekanisk system vil dette skyldes friktion eller luftmodstand. Oscillatoren siges så at være "dæmpet". Den kan også være påvirket af ydre kræfter og er så "drevet". Hvis den ydre kraft varierer i takt med oscillatorens svingning, kan der opnås resonans.

Den harmoniske bevægelse kan forekomme i mere end én dimension. Et pendul kan for eksempel bevæge sig langs en kegle i stedet for. Det kaldes så en todimensionel harmonisk oscillator. I fysik, er der mange eksempler på tredimensionelle oscillatorer, som mange gange også kan være forbundet med hinanden.

I kvantemekanikken spiller den harmoniske oscillator en **overraskende vigtig rolle**. Det skyldes primært, at det repræsenterer et af de meget få mekaniske systemer, hvis bevægelse kan beregnes kvantemekanisk nøjagtigt på en enkel måde. Dette kan derfor bruges som udgangspunkt for at give tilnærmede beskrivelser af andre kvantesystemer, der ikke har eksakte løsninger.
Men denne oscillator er også det grundlæggende element for al kvantefeltteori, da alle frie kvantefelter kan beskrives som bestående af en uendelig sum af sådanne indbyrdes forbundne, tredimensionelle harmoniske oscillatorer. Kendskab til én kvantiseret harmonisk oscillator gør det så muligt at beregne alle egenskaber af kvantefeltet.

Den harmoniske oscillator som en tilnærmelse

Der findes ingen perfekte harmoniske oscillatorer, og enhver brug af begrebet vil derfor altid være en tilnærmelse.
For det første svinger ingen oscillatorer evigt som teorien beskriver. De dæmpes i stedet idet oscillatoren mister energi der bliver til varme. Et pendul vil f.eks. efterhånden falde til ro pga. gnidning i ophænget.
For det andet gælder det kun for tilstrækkeligt små udsving at kraften mod ligevægt har en styrke proportional med udsvinget. Når man f.eks. trækker i en fjeder, skal man i starten fordoble trækstyrken for at fordoble ændringen i fjederens længde. Hvis man bliver ved med at forøge styrken knækker fjederen, og man kan gøre den vilkårligt "lang" uden at trække hårdere.

Atomer svinger i et gitter - tilnærmet harmonisk oscillator

Gitterdynamik er den fysiske beskrivelse af svingningstilstandene i krystalgitteret i faste stoffer. Inden for faststoffysikken indgår gitterdynamikken i de modeller, som på atomart niveau beskriver stoffernes makroskopiske egenskaber, fx varmekapacitet, termisk ekspansion, varmeledning og elektrisk modstand.

Klassisk beskrivelse af gitterdynamik
I en klassisk beskrivelse vibrerer atomerne omkring ligevægtspositionerne i krystalgitteret. Hvis udsvingene er små, vil atomerne udføre harmoniske svingninger, som om de var forbundne med fjedre, hvor kræfterne rettet tilbage mod ligevægtsstillingerne er proportionale med udsvingenes størrelse. Indeholder krystallen N atomer, kan disses vibrationer beskrives som en overlejring af 3N svingningstilstande i gitteret.

Den kvantemekaniske model
I den kvantemekaniske model for gitterdynamikken beskrives hver svingningstilstand som en harmonisk oscillator med energiniveauerne $E = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu,\ n = 0, 1, 2, ...,$ hvor h er Plancks konstant. Der er fortsat en karakteristisk dispersionsrelation mellem frekvensen ν og bølgelængden λ. I tre dimensioner afhænger frekvensen af bølgens udbredelsesretning. Derfor angives frekvensen i dispersionsrelationen i stedet som en funktion af en bølgetalsvektor q, hvis retning angiver bølgens udbredelsesretning, og hvis længde er $\frac{2\pi}{\lambda}$.
Energien af svingninger med frekvensen ν forekommer i kvanter af størrelsen $h\nu$. I lighed med det partikelbillede, der bruges for elektromagnetiske bølger, hvor energikvantet kaldes en foton, beskrives gittersvingningernes energikvant som en partikel og kaldes en fonon. Ofte skrives $\hbar\omega$ i stedet for $h\nu$, hvor $\omega = 2\pi\nu$ er den angulære frekvens og $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h streg).
Fononbeskrivelsen af gitterdynamikken udgør grundlaget for de moderne kvantemekaniske modeller for stoffernes mekaniske, magnetiske, optiske og elektroniske egenskaber, herunder superledning.

Svingninger i en kirkeklokke der ringer. Her dæmpes svingningerne af den omgivende luft.
Når en hammer slår hurtigt på en kirkeklokke, vil klokken begynde at ringe. Overfladen af klokken vil udfører harmoniske oscillationer med adskillige frekvenser, og, svingningerne bliver dæmpet, hovedsageligt pga. en kopling til den omgivende luft.

Energien i klokkens svingninger bliver langsomt ændret til andre frihedsgrader, i lydbølger i den omgivende luft. Klokken udsender lydbølger som svarer til svingningernes frekvenser. Klokken vil ringe et stykke tid. Det er en svagt dæmpet oscillator. Man kan sige, at i dette tilfælde, beskriver dæmpningskonstanten α koplingen mellem klokkens oscillationer og lydfeltet i luften.