

Rækkeudvikling af Gamma faktoren

John V Petersen

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Rækkeudvikling af Gamma faktoren

© 2016 John V Petersen

art-science-soul

Rækkeudvikling af Gamma faktoren

Gammafaktoren (γ) er essentiel i Einsteins specielle relativitetsteori. Ved tidsforkortelse, længdekontraktion, masseforøgelse sker ændringen med en faktor, der præcis svarer til gammafaktoren. Ved masseforøgelsen viser gammafaktoren også ændringen i energi i et system. Ovenstående effekter bliver tydelige ved hastigheder der nærmer sig lyshastigheden c .

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \beta = \frac{v}{c}$$

$$, c = 3,00 \cdot 10^8 \frac{m}{s}, \text{ lysets hastighed i vakuum}$$

Vi vil udføre en *Taylor udvikling ud fra 0*, dvs

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

Fysikere er glade for rækkeudviklinger. Det er et redskab som gør, at man kan forstå meget komplicerede udtryk, man har regnet sig frem til, i en bestemt *grænse*. I relativitetsteorien er denne grænse som regel $\ll c$, dvs den klassiske grænse, hvor objekternes hastigheder er meget mindre end lysets.

Man kan altså se sammenhænge mere klart og enkelt. Sammenhænge der måske slet ikke var til at få øje på, indse.

Vi ser på det analoge tilfælde til $(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, $|\beta| = \left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$,

potensrækken: $|x| \ll 1: f(x) = (1 + x)^\alpha$

Vi finder $f'(x)$ og $f(0)$ og $f'(0)$

$f(x) = (1 + x)^\alpha$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \alpha (1 + x)^{\alpha-1}$	$f'(0) = \alpha$

Vi har så,

$$|x| \ll 1: (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots$$

$$\text{hvis } \alpha = -\frac{1}{2}, \text{ så } (1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \quad (1)$$

ved at medtage andet led i udviklingen fås:

$$|x| \ll 1: (1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad (2)$$

Det svarer i vores tilfælde med gammafaktoren til, at vi udvikler ud fra $|\beta| = \left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$

Vi ser på $(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, og substituerer i

$$(2) \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{og} \quad x = -\beta^2 = -\frac{v^2}{c^2}, \quad |\beta| = \left|\frac{v}{c}\right| \ll 1$$

$$\gamma(v) = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (3)$$

Bemærkning

Vi multiplicerer med massen m og ser på hvordan gammafaktoren, i Einsteins ligninger, påvirker den samlede masse og dermed den samlede energi i et system, der bevæger sig med hastigheder, der er sammenlignelige med lyshastigheden c .

$$m \cdot \gamma(v) = m \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = m + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2\right) + \dots$$

Det andet led er det klassiske udtryk for den kinetiske energi divideret med kvadratet på lyshastigheden. Pga. den enorme størrelse af kvadratet på lyshastigheden vil dette led, for ikke-relativistiske hastigheder være forsvindende sammenlignet med massen. Det har derfor ikke kunnet observeres under klassiske forhold, og dette har ledt til den klassiske mekaniks princip om massebevarelse.

Grafer for gammafaktor og rækkeudviklingen - og tabelværdier , på side 5

Den blå graf f1 er gammafaktoren og den røde Graf f2 er rækkeudviklingen.

x er hastigheden v, som procent-del af lyshastigheden c.

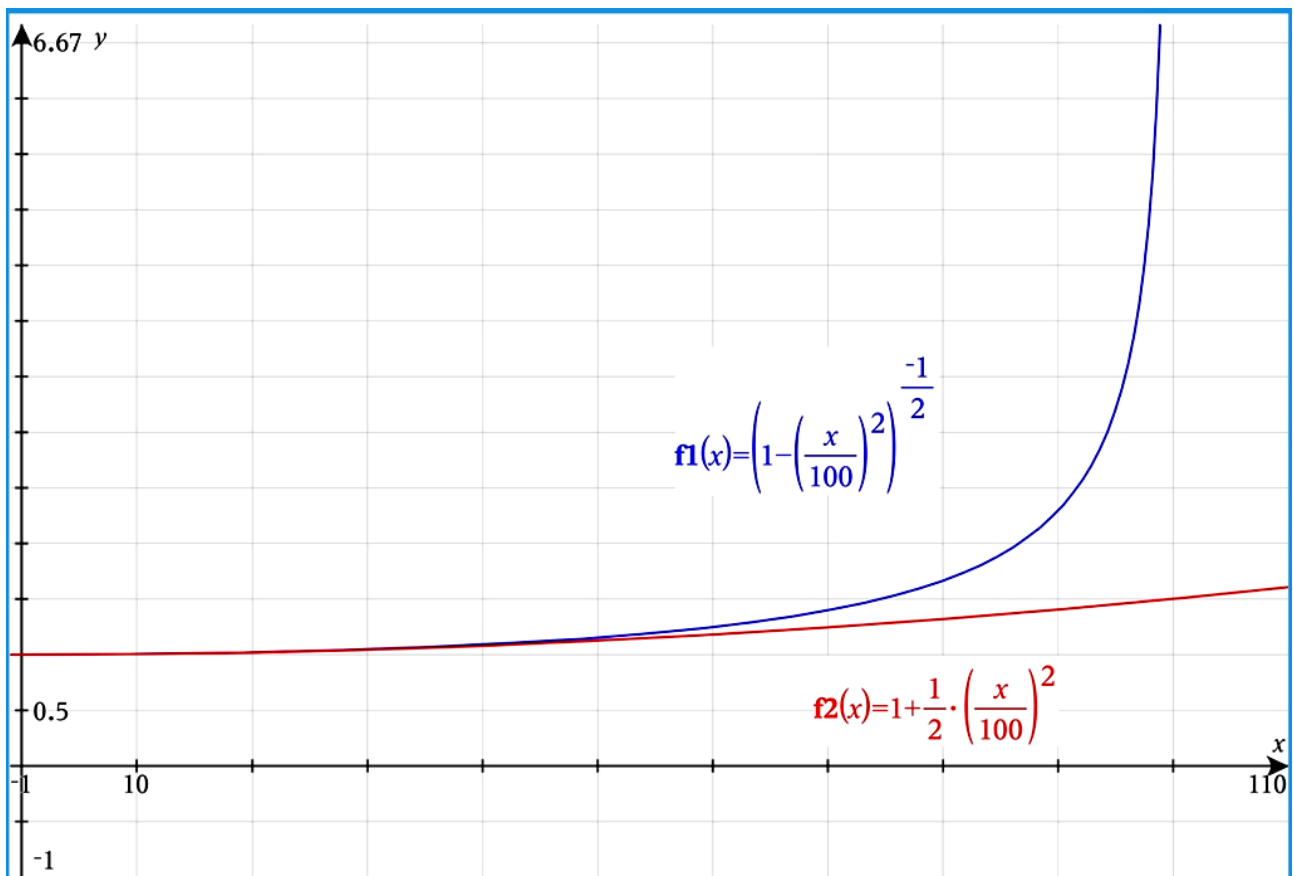
Det ses, at rækkeudviklingen af gammafaktoren ud fra v/c stemmer godt overens for v/c lille.

Hvis vi ser på overensstemmelse mellem funktionsværdier på 5 betydende cifre, er det først ved 11% af c, at der er forskel på 5. ciffer (titusindedele her).

$$11 \% \text{ af } c: v = 3,30 \cdot 10^7 \frac{m}{s} \approx 1,19 \cdot 10^8 \frac{km}{h}$$

Hvis vi ser på 4 betydende cifre (tusindedele her), er det ved 16% af c, der er forskel.

$$16 \% \text{ af } c: v = 4,80 \cdot 10^7 \frac{m}{s} \approx 1,73 \cdot 10^8 \frac{km}{h}$$



x	f1(x):= $\left(1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	f2(x):= $1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{100}\right)^2$
0.	1.	1.
1.	1.00005	1.00005
2.	1.0002	1.0002
3.	1.00045	1.00045
4.	1.0008	1.0008
5.	1.00125	1.00125
6.	1.0018	1.0018
7.	1.00246	1.00245
8.	1.00322	1.0032
9.	1.00407	1.00405
10.	1.00504	1.005
11.	1.00611	1.00605
12.	1.00728	1.0072
13.	1.00856	1.00845
14.	1.00995	1.0098
15.	1.01144	1.01125
16.	1.01305	1.0128
17.	1.01477	1.01445
18.	1.0166	1.0162
19.	1.01855	1.01805
20.	1.02062	1.02
21.	1.02281	1.02205
22.	1.02512	1.0242
23.	1.02755	1.02645
24.	1.03011	1.0288
25.	1.0328	1.03125
26.	1.03562	1.0338
27.	1.03857	1.03645
28.	1.04167	1.0392
29.	1.0449	1.04205
30.	1.04828	1.045
31.	1.05182	1.04805
45.	1.11979	1.10125
50.	1.1547	1.125
55.	1.19737	1.15125
60.	1.25	1.18
65.	1.3159	1.21125
70.	1.40028	1.245
75.	1.51186	1.28125
80.	1.66667	1.32
85.	1.89832	1.36125
90.	2.29416	1.405
95.	3.20256	1.45125
96.	3.57143	1.4608
97.	4.11345	1.47045
98.	5.02519	1.4802
99.	7.08881	1.49005