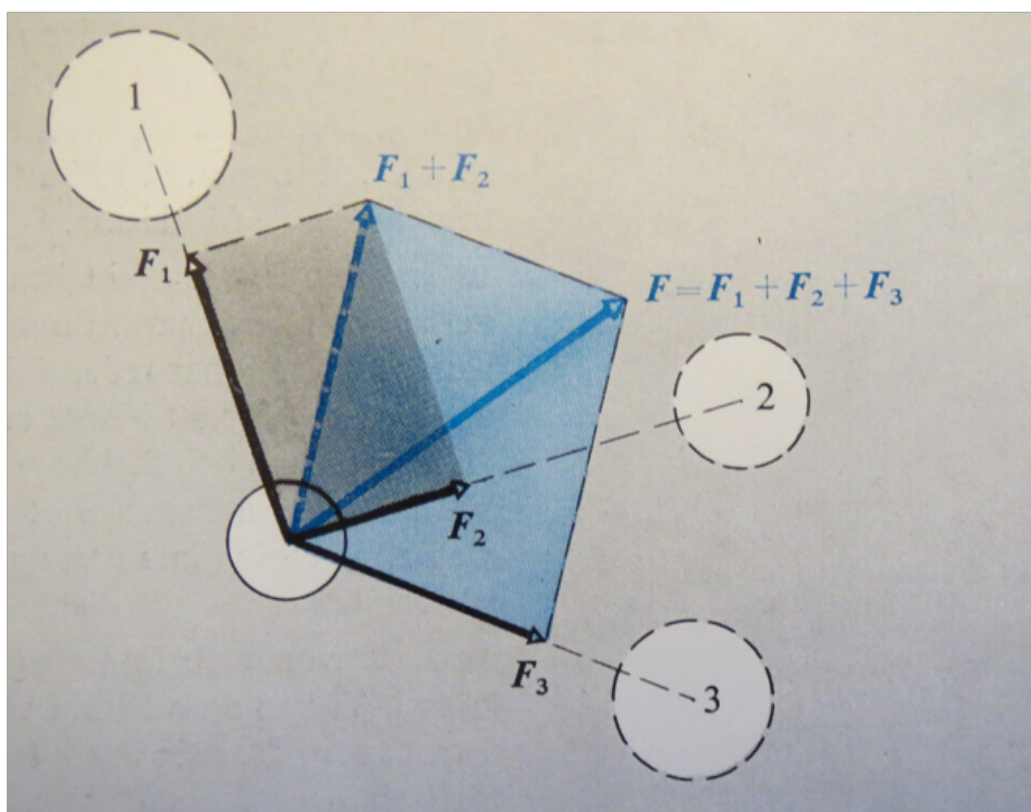


Newtons love - bevægelsesligninger - øvelser

John V Petersen



Newton's love

© 2016 John V Petersen

[art-science-soul](#)

Indhold

1. Indledning og Newtons love		4
2. Integration af Newtons 2. lov og bevægelsesligningerne		5
3. Øvelser		9
 Løsning til øvelserne		12

1. I artiklen defineres Newtons love, der udledes eksplicitte bevægelsesligninger og gives øvelser og løsninger til øvelserne.

Først vil vi huske på Newtons love

Newtons love gælder i inertialsystemer. Et kordinatsystem, hvori *inertiens lov* (se 1. lov nedenfor) gælder, kaldes et inertialsystem. Inertialsystemer er koordinatsystemer som er i hvile eller i jævn bevægelse i forhold til fiksstjernerne. Og alle koordinatsystemer som bevæger sig med konstant hastighed i forhold til et inertialsystem, er også inertialsystemer.

Jorden er kun med tilnærmelse et inertialsystem, da jorden både accelererer i sin bevægelse om solen og i rotationen om sin egen akse. Newtons love gælder således kun med (*meget god*) tilnærmelse på jorden. Så det er ok at anvende Newtons love her.

Newtons 1. lov Inertiens lov (træghedsloven)

Et legeme, der ikke er påvirket af kræfter, eller hvor den resulterende kraft (F_{res}) er nul, ligger enten i hvile eller bevæger sig med konstant hastighed, dvs med konstant fart og retning ($v = \text{konstant}$) ad en ret linje.

Inertien, trægheden for legemet betyder, at det skal accelereres for at opnå en anden hastighed. (Legemets inertit, træghed er en modstand mod ændring af tilstand. Legemet siges at have en træg masse).

$$F_{res} = 0 \Rightarrow v = \text{konstant} \Rightarrow a = 0$$

Newtons 2. lov

Hvis den resulterende kraft på et legeme, med konstant masse m , er F_{res} , vil legemet bevæge sig med accelerationen a bestemt ved

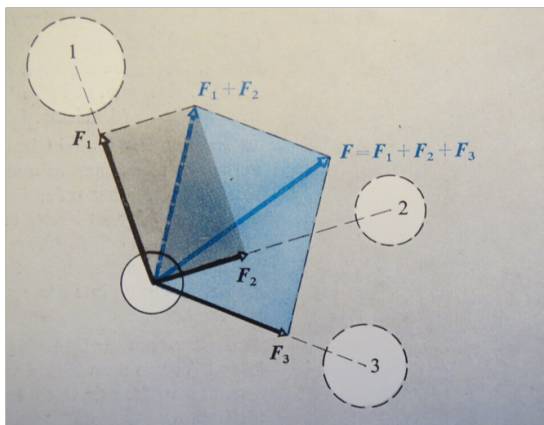
$$F_{res} = m \cdot a \quad \text{eller} \quad F_{res} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Newtons 3. lov aktion og reaktion

To legemer påvirker hinanden med lige store, men modsat rettede kræfter

Newtons 4. lov Superpositionsprincippet

Hvis et legeme påvirkes af flere kræfter, skal de virkende kræfter adderes vektorielt, og giver så den resulterende kraft på legemet.



Den resulterende kraft er her: F

2. Integration af Newtons 2. lov og de eksplícitte bevægelsesligninger

En partikel med massen m bevæger sig langs x -aksen i et koordinatsystem. En konstant kraft $K = |\mathbf{K}|$ virker på m i den positive x -retning.

Nu vil vi finde partiklens position som funktion af tiden.

Bevægelsesligningen fås ved at indsætte kraften i Newtons 2. lov:



Integration af (2.3) giver

$$v = \int \frac{K}{m} dt,$$

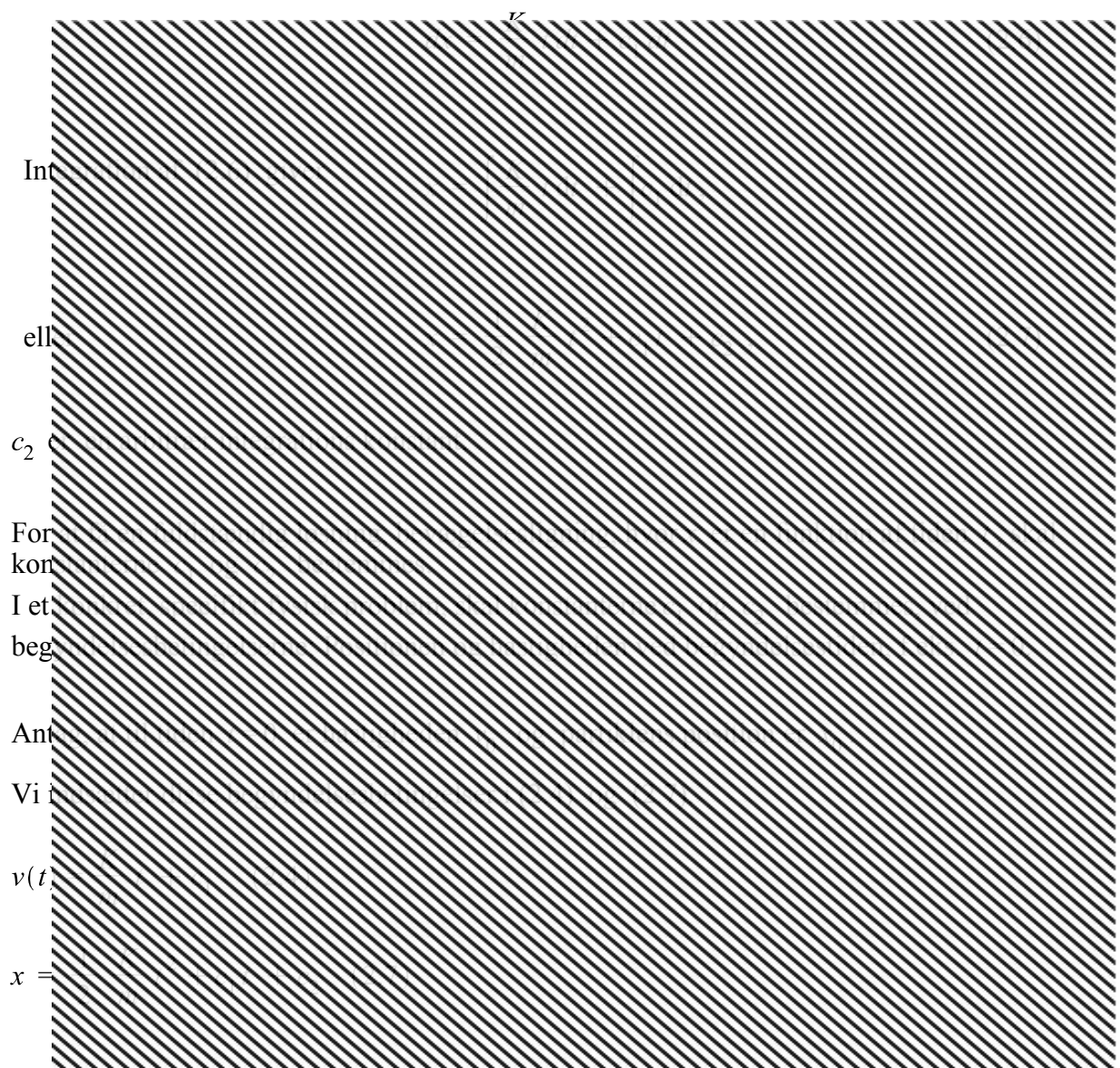
eller

$$v(t) = \frac{K}{m} t + c_1, \quad (2.4)$$

c_1 er en arbitrær integrations konstant.

Ligning (2.4) kan skrives som $\frac{dx}{dt} = \frac{K}{m} t + c_1$ (2.5)

Vi udfører igen separation af de variable (uformelt ganger vi med dt på begge sider.)



$$v_0 = 0 + c_1, \quad c_1 = v_0 \quad (2.4)$$

$$x_0 = 0 + 0 + c_2, \quad c_2 = x_0 \quad (2.7)$$

Den fuldstændige løsning er derfor:

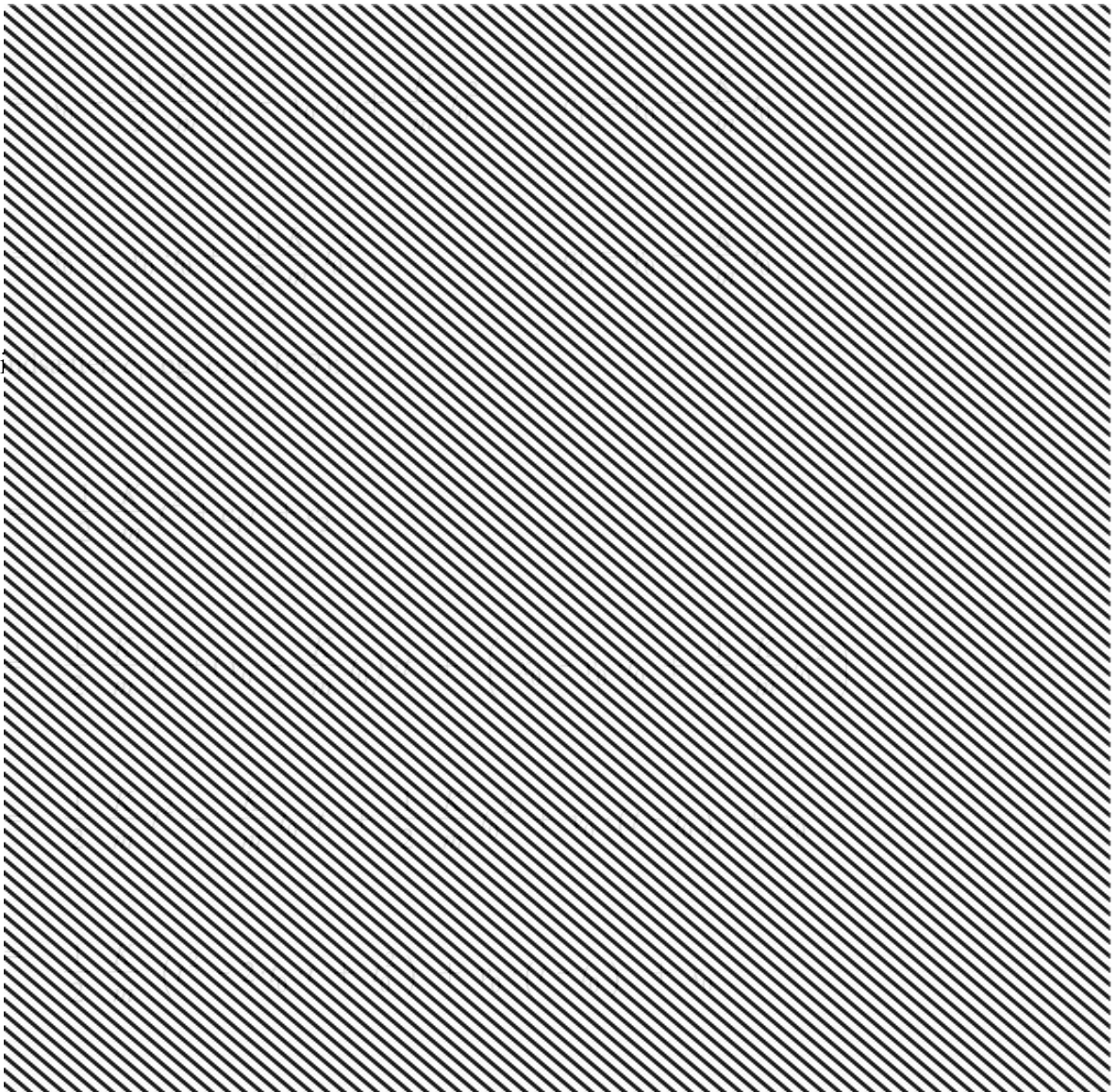
$$x = \frac{1}{2} \frac{K}{m} t^2 + v_0 t + x_0 \quad (2.8)$$

Hvis begyndelses tiden er $t = t_0$ i stedet for $t = 0$, får vi

$$v_0 = \frac{K}{m} t_0 + c_1 \quad , \quad c_1 = v_0 - \frac{K}{m} t_0 \quad (2.4)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{K}{m} t_0^2 + \left(v_0 - \frac{K}{m} t_0 \right) \cdot t + c_2 \quad (2.7)$$

Vi har



=
$$\frac{1}{2} \frac{K}{m} (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + x_0$$

Vi har

$$x = \frac{1}{2} \frac{K}{m} (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + x_0 \quad (2.9)$$

Bevægelsesligningerne her svarer til bevægelser som det frie fald (i vacuum) nær jordens overflade, hvis den totale vertikale bevægelse, udvidelse er så lille, at man kan se bort fra variationerne i højde ift gravitationskræfterne.

Vi går tilbage til ligning (2.8). Her var til tiden $t=0$, hastigheden v_0 og partiklens position x_0 .

$$x = \frac{1}{2} \frac{K}{m} t^2 + v_0 t + x_0 \quad (2.8)$$

Hvis vi så ser på

og

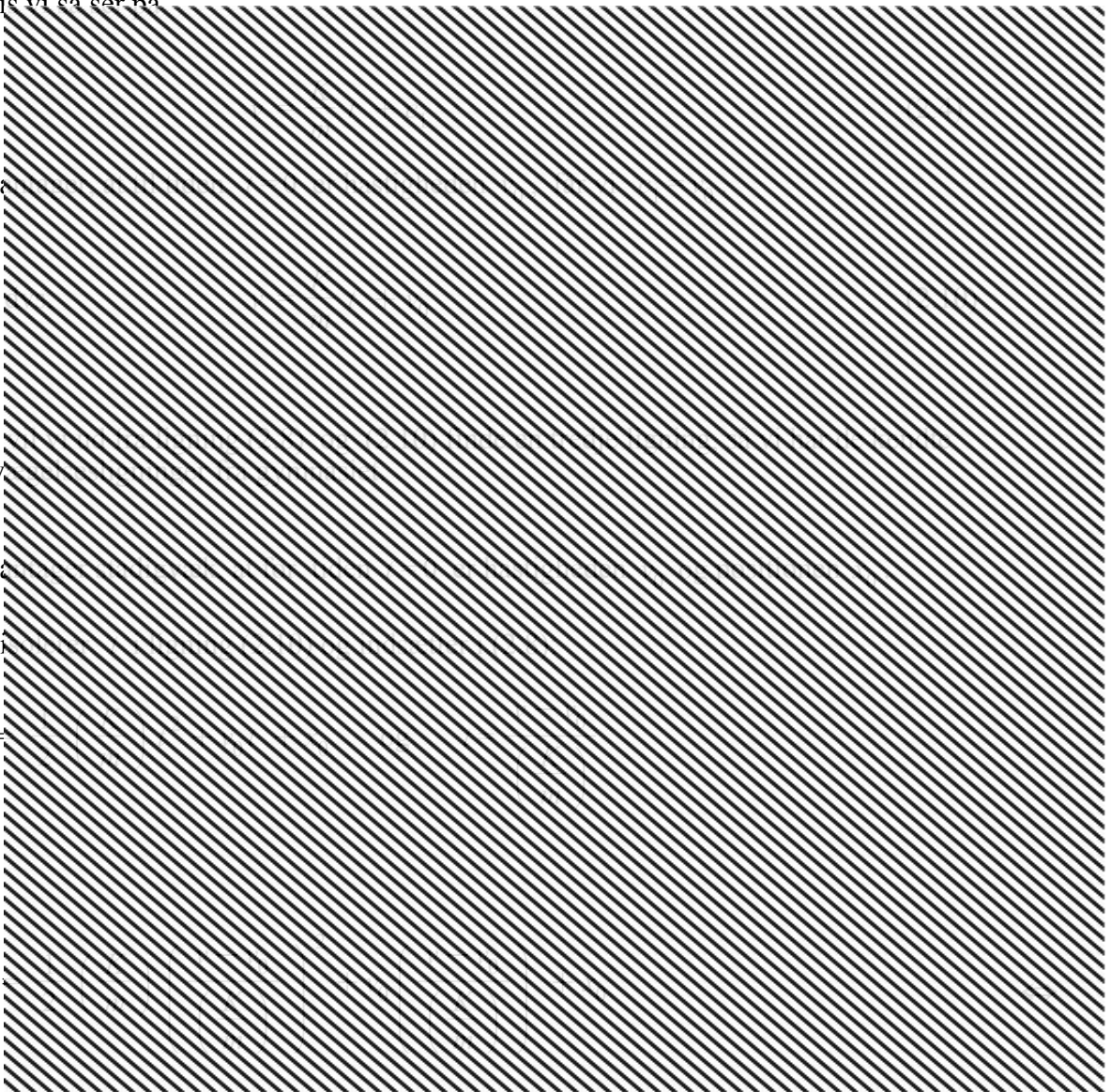
Nu
bev

Vi

Vi

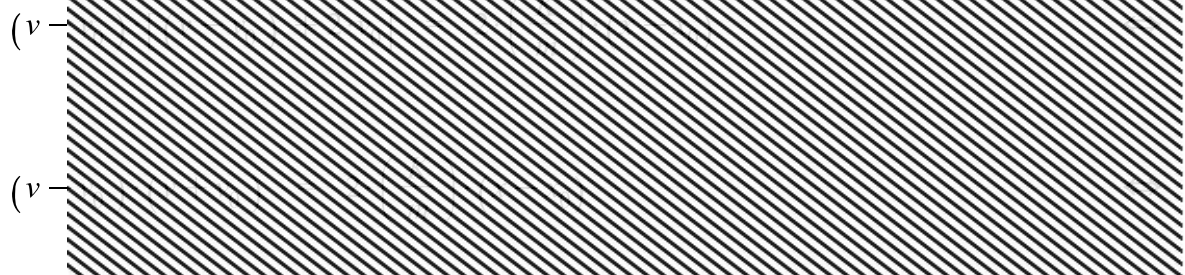
$x =$

$x =$



$$2 \cdot \left(\frac{K}{m} \right) \cdot (x - x_0) = \left(\frac{K}{m} \right)^2 \cdot \left(\frac{v - v_0}{\left(\frac{K}{m} \right)} \right)^2 + 2 \cdot v_0 \cdot \left(\frac{K}{m} \right) \cdot \left(\frac{v - v_0}{\left(\frac{K}{m} \right)} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$(v - v_0)^2 + 2 \cdot v_0 \cdot (v - v_0) = 2 \cdot \left(\frac{K}{m} \right) \cdot (x - x_0) \quad \Leftrightarrow$$



$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot \left(\frac{K}{m} \right) \cdot (x - x_0) \quad (2.11)$$

Dvs. for tiden $t=0$ er hastigheden v_0 og positionen x_0 , har vi :

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{K}{m} \right) t^2 + v_0 t + x_0 \quad (2.8)$$

$$v = \left(\frac{K}{m} \right) t + v_0 \quad (2.10)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot \left(\frac{K}{m} \right) \cdot (x - x_0) \quad (2.11)$$

Da kraften K og massen m er konstante er $\frac{K}{m} = a$, en konstant acceleration a .

Hvis vi indsætter $a = \frac{K}{m}$ i ligningerne ovenfor, har vi netop de kinematiske bevægelsesligninger vi kender fra gymnasiet.

Her ser man kun på bevægelsen, og interesserer sig i første omgang, ikke for bevægelsens årsag, hvilke kræfter der virker.

3. Øvelser

Nu kommer der fire øvelser, hvor vi kan bruge ligningerne (2.3) til (2.11) til at løse dem. Øvelserne stiger lidt i sværhedsgrad, så øvelse 1 og 2, er de nemmeste.

Øvelse 1

Et togs hastighed bliver reduceret fra $15 \frac{m}{s}$ til $7,0 \frac{m}{s}$, mens det bevæger sig ad en strækning på $90 m$.

a) Beregn togets acceleration a .

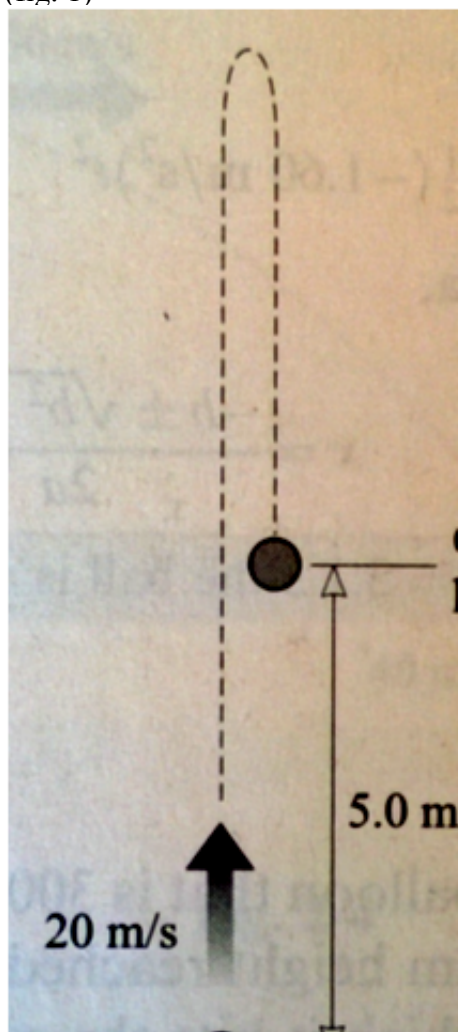
b) Hvor langt vil toget køre, før det holder stille, hvis accelerationen er konstant ?

Øvelse 2

En sten kastes lodret opad, i jordens gravitationsfelt, med hastigheden $20 \frac{m}{s}$ til tiden $t = 0$.

Den bliver grebet på vej nedad, $5,0 \text{ m}$ over hvor den blev kastet fra (se fig. 1). Vi ser bort fra luftmodstanden.

(fig. 1)



a) Hvilken hastighed havde stenen, da den blev grebet ?

b) Hvor lang tid tog stenens bevægelse fra kastet til grebet ?

Øvelse 3

Et lokomotiv kører med en hastighed på $v_0 = 100 \frac{km}{h}$ (*km i timen*) på en lige skinnestrækning.

Togets masse M er 10 ton. Til tiden $t = 0$ begynder toget en nedbremsning ved at blokere hjulene helt.

Det forårsager, at en friktionskraft F optræder. Vi antager, at F er konstant.

a) Opskriv bevægelsesligningen for toget til tiden $t > 0$

b) Antag, at toget stopper helt efter 400 m. Bestem størrelsen af F og tiden t_1 , hvor toget stopper.

Øvelse 4

En sten kastes lodret opad i jordens gravitationsfelt. Et punkt P er i højden h over start punktet.

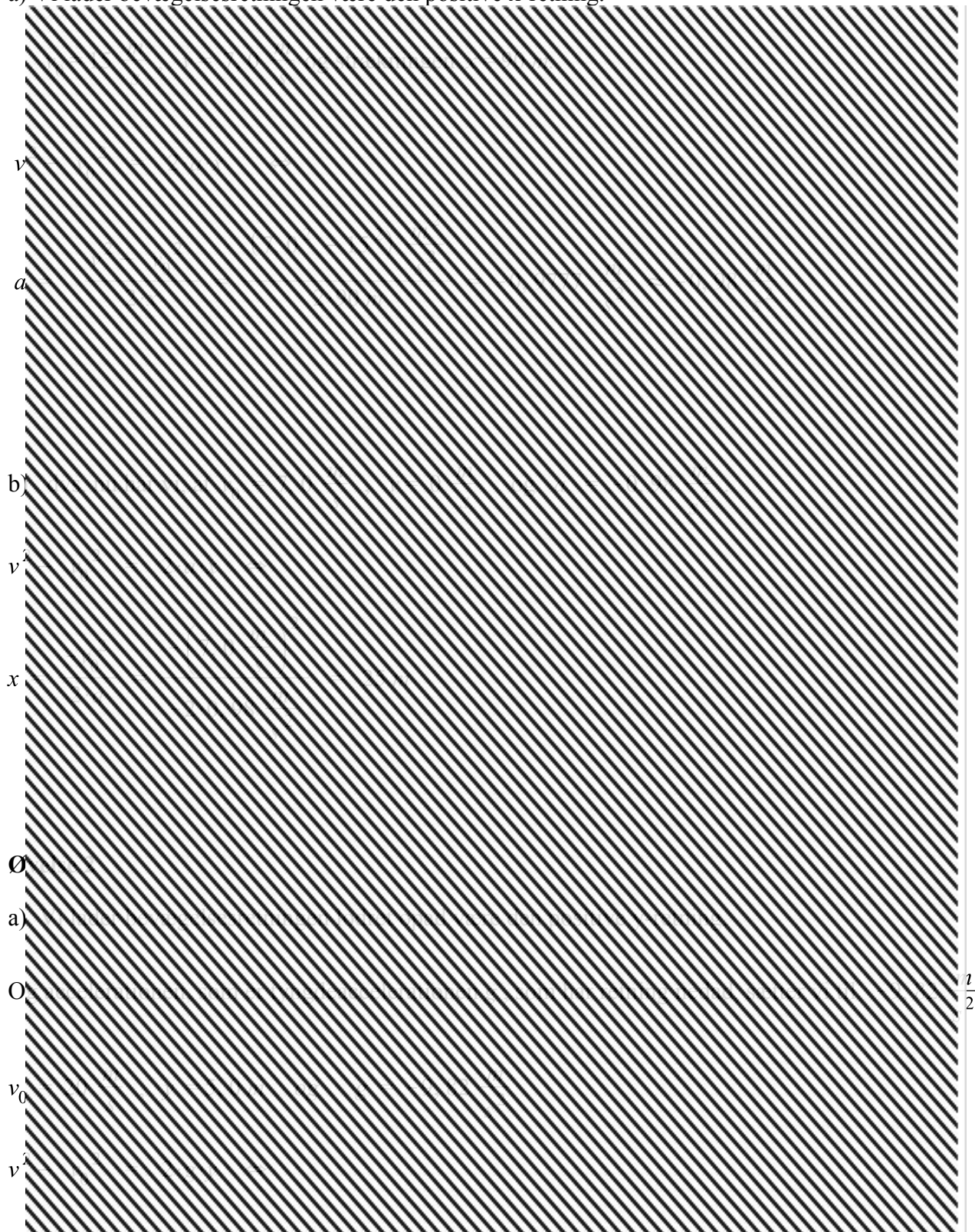
Stenen passerer P på vej opad, 2 sekunder efter den var kastet, og 4 sekunder efter passerer stenen P på vej nedad.

a) Beregn h og begyndelseshastigheden v_0 . Se bort fra luftmodstanden.

Løsninger til øvelserne

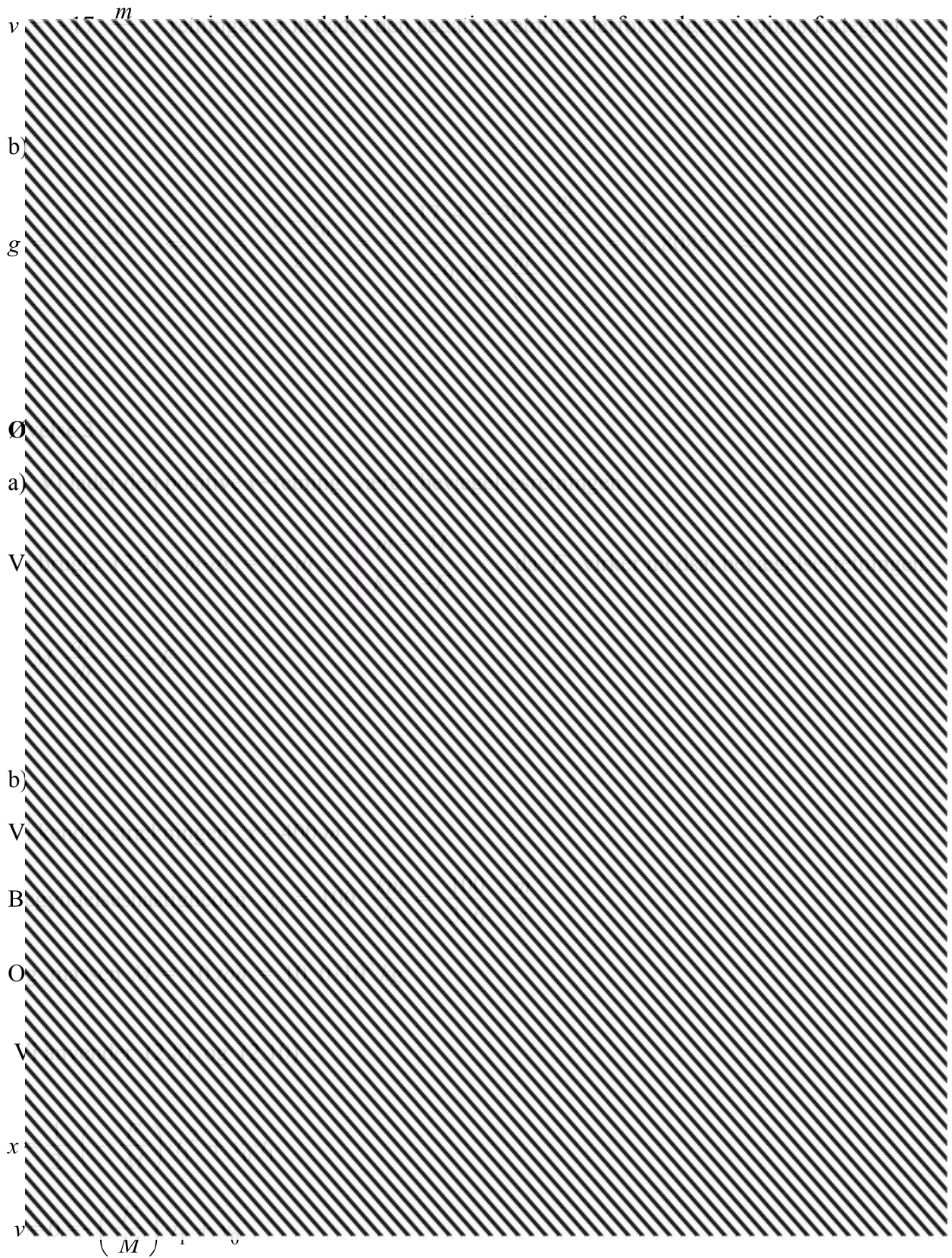
Øvelse 1

a) Vi lader bevægelsesretningen være den positive x-retning.



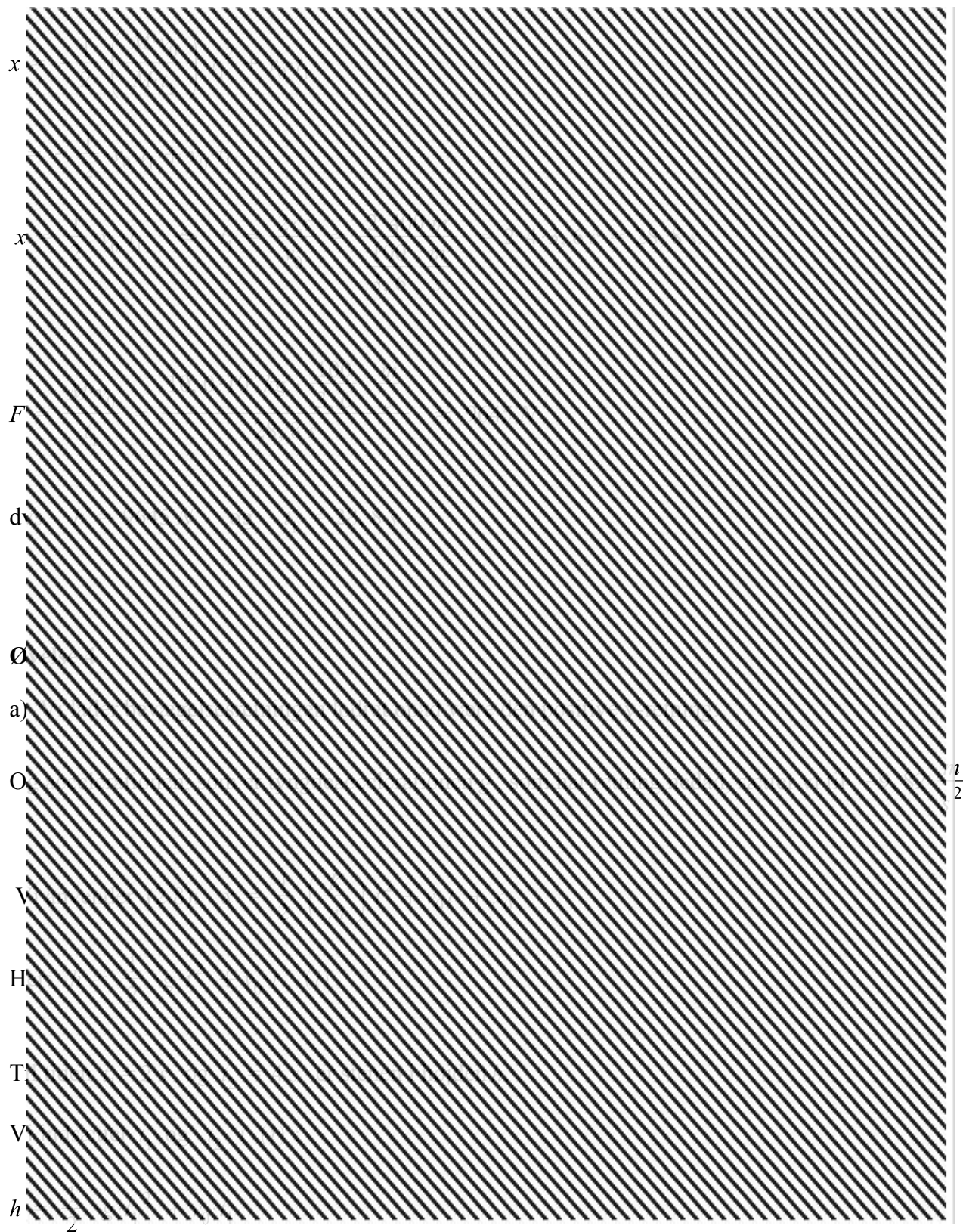
$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot y} = \pm \sqrt{\left(20 \frac{m}{s}\right)^2 - 2 \cdot 9,82 \frac{m}{s^2} \cdot 5,0 m}$$

$$= \pm 17,3724 \frac{m}{s} \approx \pm 17 \frac{m}{s}$$



dvs. vi har to ligninger med to ubekendte (t_1, F)

$$\frac{F}{M} \cdot t_1 = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{M \cdot v_0}{t_1} \quad \text{indsættes i (2.8):}$$



$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 + v_0 \cdot t_2$$

Vi har nu to ligninger med to ubekendte (v_0, h)

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 + v_0 \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 + v_0 \cdot t_2 \quad \Leftrightarrow$$

