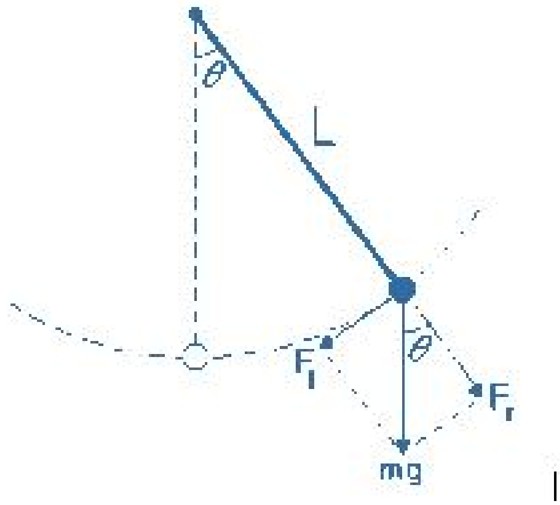
Matematisk pendul

John V Petersen



Matematisk pendul

art-science-soul

Indhold

1. Indledning 4

2. Opstille- og løse differentialligning for pendulet 4

3. Udledning af formel for svingningstiden 6

4. Sammenhæng mellem T og L, tabel med snorlængde L_0, $4 \cdot L_0$, $9 \cdot L_0$ 6

5. Graf for $T(L)$ 7

6. Relationer mellem frekvens f, T, ω 7

7. Harmonisk oscillator $\theta'' = -k \cdot \theta$ 8

9. Appendiks: Bevis for $\theta \approx \mathrm{Sin}(\theta)$, for små udsving 9

Matematisk pendul

Et matematisk pendul er en idealisering: et punktformigt lod i en masseløs og ustrækkelig snor!
I denne artikel vil vi finde, udlede formlen for svingningstiden T for et matematisk pendul.
En formel der gælder, med tilnærmelse, for små udsving af pendulet.

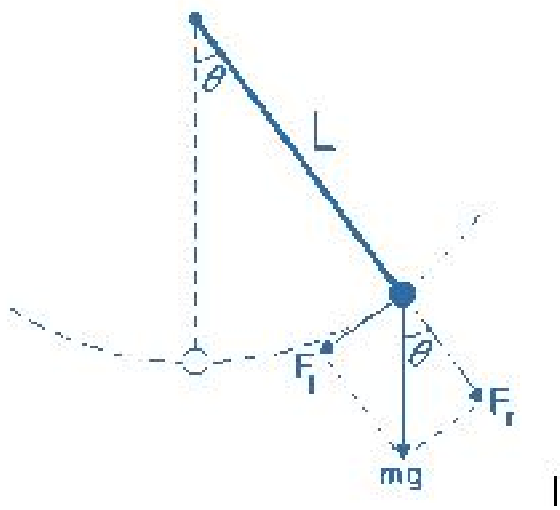


fig. 1

fig. 1 viser et matematisk pendul. Snoren har længden *L.* Snorens vinkel i forhold til lodret er θ. I artiklen her vil vi skrive θ , men huske at det skal opfattes som θ(t) . θ er en funktion af tiden t.
Den ophængte masse *m* er påvirket af tyngdekraften, som har størrelsen $m \cdot g$. Vi regner med positiv retning opad, altså modsat $m \cdot g$, så derfor skal vi i vores udregninger regne med $- m \cdot g$.

Formlen for svingningstiden *T* udledes ved at betragte kraften langs banen, som jo er en cirkelbue.

Tyngdekraftens projektion på banen, tangentialkraften F_t er $m \cdot g \cdot Sin(\theta)$.

Vejlængden på banen, som er del af en cirkelbue, er $L \cdot \theta$, da θ måles i det naturlige vinkelmål radianer.
(Hvis vi måler vejlængden for hele cirklen er den $L \cdot [2 \cdot \pi]$ **).**

Når vi nu skal se på kræfterne der virker har vi brug for vinkelaccelerationen $(L \cdot \theta)''$.
Vejlængden er $L \cdot \theta$. Hvis vi differentierer $L \cdot \theta$ med hensyn til tiden t , får vi vinkelhastigheden $L \cdot \theta'$.
Vinkelhastigheden er ændring af vinkel (radianer) pr. sekund, og betegnes med ω $(enhed\, s^{-1})$.

Derefter differentierer vi en gang til og får vinkelaccelerationen $(L \cdot \theta)''$,
som er ændring af vinkelhastigheden ω pr. sekund, og $(L \cdot \theta)''$ har enheden s^{-2}.

Den resulterende kraft på massen m, er $F_{res} = m \cdot a = m \cdot (L \cdot \theta)'' = -m \cdot g \cdot Sin(\theta)$.

Dermed har vi bevægelsesligningen $m \cdot L \cdot \theta'' = -m \cdot g \cdot Sin(\theta)$

$$L \cdot \theta'' = -g \cdot Sin(\theta)$$

$$\theta'' = -\frac{g}{L} \cdot Sin(\theta)$$

For små udsving , dvs. $\theta << 1$, kan vi

erstatte $Sin(\theta)$ med θ . Vi skal altså vise at $\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{Sin(\theta)}{\theta} \right) = 1.$

Det kan også udtrykkes $\frac{Sin(\theta)}{\theta} \to 1$ for $\theta \to 0$. (*se bevis* for *det i appendiks* 1).

Vi har så den andenordens differential ligning

$$\theta'' = -\frac{g}{L} \cdot \theta \qquad (1)$$

Vi gætter på løsningen $\theta(t) = \theta_{max} \cdot Sin(\omega \cdot t)$, θ_{max} er den maksimaleudslagsvinkel for pendulet.

(da *Sinus* funktionen differentieret to gange giver $-Sin$).

Vi differentierer løsningen

$$\theta'(t) = \theta_{max} \cdot \omega \cdot Cos(\omega \cdot t)$$

$$\theta''(t) = -\theta_{max} \cdot \omega^2 \cdot Sin(\omega \cdot t)$$

Vi indsætter i (1)

$$-\theta_{max} \cdot \omega^2 \cdot Sin(\omega \cdot t) = -\frac{g}{L} \cdot \theta_{max} \cdot Sin(\omega \cdot t)$$

$\Leftrightarrow$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad (2)$$

Vi skal finde udtrykket for svingningstiden T :

Vi ganger $\boldsymbol{\omega}$, radianer pr. sekund **med** svingningstiden
$\boldsymbol{T}$, som er sekunder for een svingning (eller periode).

Derved **får** vi antal radianer for een svingning, altså $\mathbf{2 \cdot \pi}$ **.**

$$\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \qquad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

Vi indsætter (2) $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ og får $\boxed{T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}}$

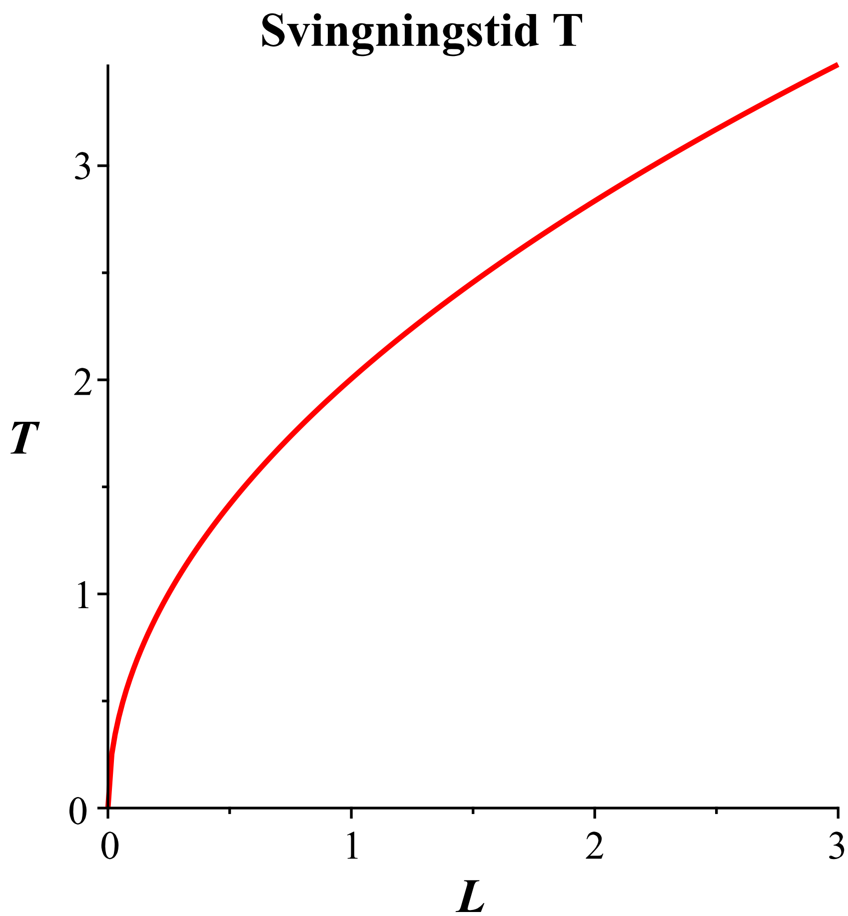
Det ses, at svingningstiden T, kun afhænger af snorlængden L. Svingningstiden er proportional med kvadratet på snorlængden.

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{L}$$

I nedenstående tabel ses sammenhængen mellem forskellige snorlængder og sammenhørende svingningstid. Vi bruger $g = 9.82 \ \frac{m}{s^2}$

$\boldsymbol{L \cdot (m)}$	$\boldsymbol{T \cdot (s)}$
0.10	0.634
$\mathbf{4} \cdot 0.10 \ = 0.40$	$\mathbf{2} \cdot 0.634 = 1.268$
$\mathbf{9} \cdot 0.10 \ = 0.90$	$\mathbf{3} \cdot 0.634 = 1.902$
$\mathbf{16} \cdot 0.10 = 1.60$	$\mathbf{4} \cdot 0,634 = 2.536$

Grafen viser sammenhængen mellem snorlængden L og svingningstiden T.



Sammenhængen mellem ω, T og frekvensen f

Vi har set på vinkelhastigheden ω, og svingningstiden T. ω har enheden $rad \cdot s^{-1}$, eller blot s^{-1}.
T har enheden s. Det vil være naturligt lige at tage frekvensen f med .

Frekvensen er antal svingninger pr. sekund. Altså s^{-1} som også har betegnelsen Hz.

Antag, at en svingning har f.eks. 5 gennemløb pr. sekund.

Det betyder, at der hvert sekund gennemløbes 5 perioder, T, svarende til at $T = \frac{1}{5}\ s = 0.2\ s$.

Dvs. fekvensen $f = 5\ s^{-1}$: Sammenhængen mellem T og f er altså givet ved

$f = \frac{1}{T}$ eller $T \cdot f = 1$. Svingningstiden og frekvensen er omvendt proportionale .

Vi har fra tidligere $\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$ eller $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f$.

Dvs. $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$.

Frekvensen f er antal svingninger pr. sekund og vinkelhasigheden ω er antal radianer pr. sekund.

eksempel: Den vekselstrøm, vi har i stikkontakten, har frekvensen $f = 50\ Hz$.

Strømmen produceres af en generator, der drejer med vinkelhastigheden $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 50\ Hz = 314\ s^{-1}$.

Harmonisk oscillator

I fysik betegner harmonisk oscillator en bestemt type svingende systemer. Eksempler er - som her et svingende pendul. Eller atomerne der vibrerer, svinger omkring ligevægtspositionerne i et krystalgitter.

En harmonisk oscillator er karakteriseret ved, at kraften er proportional med afvigelsen fra ligevægt.

Her i artiklen om det matematiske pendul udtrykkes sammenhængen ved $\theta'' = -\frac{g}{L} \cdot \theta$ (1) ,
hvor vi startede med at se på kræfterne der virkede på pendulet

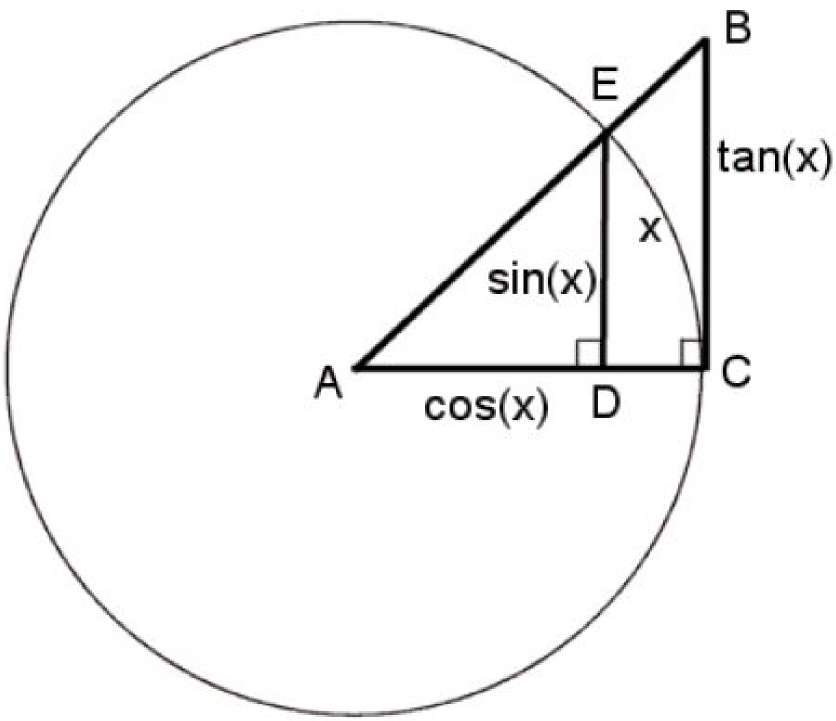
$F_{res} = m \cdot a = m \cdot (L \cdot \theta)'' = -m \cdot g \cdot Sin(\theta)$.

Altså $F_{res} = -m \cdot g \cdot Sin(\theta)$.

Appendiks

Bevis for θ ≈ Sin(θ) , for små udsving

Vi skal vise, at $\dfrac{Sin(\theta)}{\theta} \rightarrow 1$ for $\theta \rightarrow 0$



På figuren ses det, at $Sinx < x < tgx$ eller $Sinx < x < \dfrac{Sinx}{Cosx}$

dvs $\dfrac{Sinx}{x} < 1$ og $\mathrm{Cosx} < \dfrac{\mathrm{Sinx}}{x}$

Vi har $\mathrm{Cosx} < \dfrac{\mathrm{Sinx}}{x} < 1 \quad \cdot(\alpha)$

$Cosx$ er en lige funktion og $\dfrac{Sinx}{x}$ er også en lige funktion (dvs $f(x) = f(-x)$)

Da $\frac{Sinx}{x}$ ligger nærmere ved 1 end Cosx , ifølge (α), har vi, at

$$|\,1 - \frac{Sinx}{x}\,| \;<\; |\,1 - Cosx\,| \qquad (\beta)$$

Cosx er kontinuert i 0 , så $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$:

$$|\,x - 0| < \delta \;\Rightarrow\; |\,1 - Cosx\,| < \varepsilon$$

dermed har vi , at $0 < |\,x - 0| < \delta \;\Rightarrow\; |\,1 - \frac{Sinx}{x}\,| < \varepsilon$ ifølge (β)

Vi har nu vist det ønskede $\frac{Sin(\theta)}{\theta} \to 1$ for $\theta \to 0$

□