

MATEMATIKKENS FILOSOFI

STIG ANDUR PEDERSEN

1. INTRODUKTION

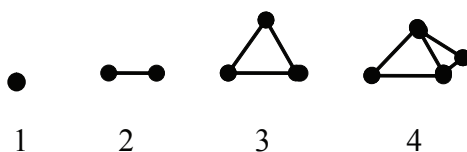
Allerede i oldtiden vidste man, hvordan man kunne beskrive virkeligheden med tal. I den gamle babyloniske kultur (2000 – 1600 f.Kr.) var man i stand til at beregne arealer af marker og føre regnskab over sine besiddelser. Pythagoræerne, som virkede ca. 500 år f.Kr., studerede harmonier og kendte til, hvordan de kunne udtrykkes ved forhold mellem tal. Således svarer oktaven til forholdet $2 : 1$, kvinten til $3 : 2$ og kvarten til $4 : 3$. Det er derfor ikke så mærkeligt, at de antikke filosoffer tillagde tallene en særlig vigtig rolle. Det mest radikale synspunkt blev formuleret af pythagoræerne, som mente, at verden var opbygget af tal. Aristoteles (384 – 322 f.Kr.) siger om dem

da ... de i tallene syntes at se mange ligheder til ting, som eksisterer og kommer til at eksistere, mere end i ild og jord og vand ...; da de igen så, at modifikationer og forhold i de musikalske skalaer kunne udtrykkes i tal; da således alle andre ting syntes i deres natur at kunne modelleres i tal, og tal syntes at være de første ting i hele naturen, antog de, at tallenes elementer var alle tings elementer, og at hele himlen var en musikalsk skala og et tal. Og alle egenskaberne ved tal og skalaer, som de kunne vise at stemme overens med egenskaber og dele af hele himmelarrangementet, samlede de og passede dem ind i deres skema; og hvis der manglede noget et eller andet sted, så tilføjede de beredvilligt noget, som gjorde hele deres teori kohærent. Da f.eks. tallet 10 ansås for at være fuldkomment og omfatte alle tallenes natur, sagde de, at der findes 10 himmellegemer. Men da der kun er 9 synlige legemer, opfandt de et tiende: kontra-jorden.¹

For pythagoræerne er der ingen forskel mellem tallet 1, et punkt eller den mindste materielle partikel. Der er fuldstændig parallelitet mellem forekomsten af geometriske objekter - som punkter, linjer, flader og rumlige figurer - materielle genstande og tal. Som det fremgår af figur 1, svarer 1 til

¹Aristotle (1998), Bog 1

et punkt (enten geometrisk eller materielt), 2 til et linjestykke, 3 til en plan figur (f.eks. en trekant), og 4 til en rumlig figur (f.eks. et tetraeder). Disse tal summer op til 10, som er fuldkommen og repræsenterer hele universet.



FIGUR 1. Pythagoræernes fremstilling af geometriske former

Fra et moderne synspunkt virker det absurd at identificere den abstrakte numeriske enhed 1 med et geometrisk punkt eller et materielt punkt. Men pythagoræerne havde ikke en klar distinktion mellem det konkrete og det abstrakte. Det materielle og det begrebslige niveau var ikke klart adskilte. Endvidere syntes tal, som Aristoteles skriver, at være tilstede alle vegne.

2. PLATONS MATEMATIKOPFATTELSE

I Platons (429 – 347 f.Kr.) filosofi finder vi en mere præcis adskillelse mellem det abstrakte og det konkrete. Når matematikere arbejder, antager de eksistensen af tal og geometriske figurer.

Du ved vist nok, at de, der giver sig af med matematik og regning og den slags ting, forudsætter de ulige og de lige tal og figurerne og tre slags vinkler [rette, stumpe og spidse vinkler] og opstiller andre dermed beslægtede forudsætninger ved hver enkelt undersøgelse, og idet de går ud fra, at det er noget, som de ved, betragter de det som forudsætninger og mener derfor ikke, at de behøver at give hverken sig selv eller andre nogen yderligere begrundelse for dem, eftersom de må være indlysende for enhver ...²

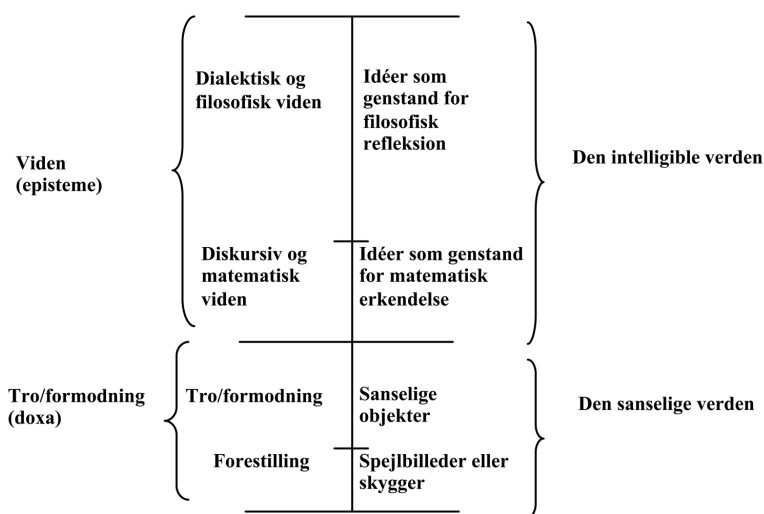
Ud fra denne type antagelser, som svarer til de matematiske aksiomer, vi finder i *Euklids Elementer*³, producerer matematikerne ny viden ved at foretage logiske gyldige slutninger. Men under deres arbejde tillader de sig at tegne figurer, som kun er skygger eller ufuldkomne billeder af *de ideale matematiske figurer*. De synlige figurer benyttes således heuristisk som spejlbilleder af de virkelige objekter, som matematikken vedrører.

²Plato (360 B.C.), VI 510D

³Euclid (1956)

Ved du så ikke også, at de benytter sig af de former, som kan ses, og anstiller deres slutninger over dem, endskønt det ikke er dem, deres slutninger gælder, men derimod dem, som disse er afbildninger af? For det er selve firkanterne og selve deres diagonaler, de drager slutninger om, ikke den diagonal, som de tegner, og ligeså forholder det sig i alle de andre tilfælde: selve de figurer, som de former og tegner, de som både kan kaste skygge og spejle sig i vand, dem bruger de som spejlbilleder, og ved deres hjælp søger de at få øje på selve det, som man ikke kan få øje på ved noget andet middel end ved sin slutningsevne.⁴

Ifølge Platon drejer al tænkning - måde matematisk og filosofisk - sig om ideer, og de synlige objekter er kun spejlbilleder og skygger af disse ideer. Verdens indretning og vores tænkning om den illustrerer Platon med sin liniemetafor (figur 2).



FIGUR 2. Platons liniemetafor

Matematikken vedrører ifølge Platon den intelligible verden. Den adskiller sig fra filosofien ved at starte med antagelser, som uden yderlig begrundelse anses for at være evidente, og derfra argumentere sig logisk frem til interessante konklusioner. De evidente antagelser er matematikkens *aksio-mer*, og de konklusioner, man når frem til, er matematikkens *sætninger*.

⁴Plato (360 B.C.), VI 510D

Filosofien anvender på den anden side ikke antagelser som første principper, men som udgangspunkt for en dialektisk proces, hvis formål er at nå frem til de egentlige første principper.

Så må du altså også forstå, at ved det andet afsnit af det tænkelige mener jeg det, som selve bevisførelsen tager fat på ved hjælp af den evne, der ytrer sig ved drøftelser i samtaleform, idet den ikke benytter forudsætningerne som udgangspunkter, men bogstavelig talt som grundlag, hvorpå den så at sige bygger op og skrider frem fra trin til trin, for at den, når den bevæger sig frem imod udgangspunktet for alting indtil det forudsætningsløse, kan tage fat på dette og således, idet den støtter sig på de forudsætninger, der støtter sig på dette, kan nå frem til et slutpunkt uden nogensomhelst anvendelse af noget sanseligt og med anvendelse af rene begreber på rene begreber ende med begreber.⁵

Vi kan således ifølge Platon betragte matematikkens filosofi som den dialektiske begrundelse af matematikkens antagelser. Platon skelner ikke skarpt mellem de matematiske objekter og deres egenskaber. Når han f.eks. i citatet ovenfor siger "at de, der giver sig af med matematik og regning og den slags ting, forudsætter de ulige og de lige tal og figurerne og tre slags vinkler [rette, stumpe og spidse vinkler] og opstiller andre dermed beslægtede forudsætninger ved hver enkelt undersøgelse", er det naturligt at forstå ham i retning af, at aksiomer som f.eks. de euklidiske antages uden yderlig begrundelse. Matematikkens filosofi består således i at give filosofiske begrundelser for de matematiske aksiomer og, kunne vi tilføje, andre former for antagelser som indgår i den matematiske argumentation.

Den virkelige verden er for Platon den intelligible verden, og matematikken er en videnskab, som studerer objekterne i denne verden, nemlig ideerne. De matematiske objekter - dvs. tal og geometriske figurer - findes derfor som ideale objekter, hvorimod samlinger af sanselige objekter og figurer, som vi anvender, når vi laver matematik, kun er skygger af matematikkens virkelige objekter. De matematiske objekter findes således i den begrebslige verden og er kun tilgængelige gennem tænkning. Dette er en form for *konceptuel realisme*, som vi kalder *platonisme*.

3. ARISTOTELESES MATEMATIKOPFATTELSE

Platons elev Aristoteles kunne ikke acceptere eksistensen af en ren idéverden. For ham var det egentlige eksisterende de konkrete enkelte ting i vor omverden. De konkrete ting består af materie og form. De naturlige objekter, som omgiver os, har som del af deres form en geometrisk afgrænsning.

⁵Plato (360 B.C.), VI 510D

Pointen er, at naturlige legemer har overflader og rumfang, længde og punkter, og de er genstandene for matematisk forskning.⁶

Det er matematikernes opgave at beskrive og studere de geometriske aspekter af konkrete ting. De abstraherer således fra de materielle sider af objekterne.

... [matematikere] er ikke interesseret i den kendsgerning, at overflader osv. danner grænserne for naturlige legemer, og de anser heller ikke disse legemernes egenskaber for egenskaber ved naturlige objekter.⁷

Men der findes også anvendt matematik, f.eks. optik, harmonilære og astronomi. Disse videnskaber beskæftiger sig også med geometriske objekter, men på en anden måde, idet de beskæftiger sig med geometriske former, som de forekommer i naturen, dvs. de geometriske former af materielle objekter.

... Yderlig afklaring kommer fra de grene af matematikken, som er tættest på naturvidenskab (såsom optik, harmonilære og astronomi), da de på en måde er det modsatte af geometri: hvor geometri studerer naturligt forekommende linier, men ikke som de forekommer i naturen, studerer optikken matematiske linier, men som de forekommer i naturen snarere end som rene matematiske entiteter.⁸

Aristoteles gør således radikalt op med Platons idélære. Idélæren fører til inkonsistenser, og den bidrager ikke til forklaring af noget. Om dette skriver Aristoteles i *Metafysikken*

Man kan således først og fremmest stille spørgsmålet hvad overhovedet ideerne bidrager med til det sanselige ... For ideerne forklarer ikke nogen bevægelse eller forandring i sanselige objekter. Og vedrørende det ikke-sanselige bidrager ideerne ikke på nogen måde til viden om dem ...⁹

Også hos Aristoteles er matematikkens objekter tallene og de geometriske figurer. Men i modsætning til Platon findes objekterne ikke længere som abstrakte idéer. De eksisterer derimod som en abstrakt del af den materielle virkelighed. Ud fra kendskabet til kugleformede objekter kan vi abstrahere os frem til den ideelle matematiske kugle. Den ideelle matematiske kugle

⁶Aristotle (1996), 193^b₂₂ – 193^b₂₅

⁷Aristotle (1996), 193^b₃₁ – 193^b₃₅

⁸Aristotle (1996), 194^a₇ – 194^a₁₂

⁹Aristotle (1998), 991^a₁₀ – 991^a₂₀

har ikke eksistens i sig selv, men kommer til at eksistere som et *konceptuelt objekt* i kraft af vor abstraktionsevne.

De virkelige objekter, som omgiver os, består af materie og form. Når vi studerer dem videnskabeligt, begrænser vi os til bestemte træk ved dem. Så på en måde beskæftiger fysikere, matematikere og filosoffer sig med de samme objekter, men ud fra forskellige vinkler. Således studerer både matematikere, astronomer og optikere rette linjer og cirkler, men ud fra forskellige perspektiver. De afgrænser forskellige former for forskningsobjekter. En ret linje eller en cirkel som forskningsobjekt betyder således noget forskelligt for matematikeren, astronomen og optikeren.

Alt værende kan, ifølge Aristoteles abstraktionslære, beskrives ud fra tre forskellige synsvinkler¹⁰

- (1) *Fysisk*, idet man betragter legemerne i deres materialitet og med de dertil knyttede egenskaber som f.eks. bevægelse og hvile, varme og kulde osv. På dette trin abstraherer man kun fra de individuelle egenskaber ved en klasse af fænomener, om hvilken man derefter kan udsige generelle "fysiske love".
- (2) *Matematisk*, idet man abstraherer fra legemernes materielle egenskaber og alene betragter deres antal, størrelse og geometriske form. Derved fremkommer generelle relationer, som udgør matematikkens love.
- (3) *Metafysisk*, idet man nu også abstraherer fra tingenes matematiske egenskaber og kun undersøger meget abstrakte relationer såsom kausalsammenhænge og eksistensproblemer.

Jo mere abstrakt en videnskab er, des mere universelt gyldige er dens lovmæssigheder. Metafysikkens love vedrører generelle eksistensbetingelser og årsagssammenhænge, og de gælder også i matematiske og naturvidenskabelige sammenhænge. Tilsvarende gælder matematikkens abstrakte love også i de forskellige naturvidenskaber.

Ifølge Aristoteles kan man således sige, at matematikken og fysikken beskæftiger sig med de samme fænomener, nemlig de materielle objekter som de findes i vore omgivelser. Men de gør det på to forskellige måder. Fysikeren beskæftiger sig med objekters materielle egenskaber som bevægelse, varme, farver, osv. og abstraherer fra individuelle egenskaber. Matematikeren abstraherer også fra de fysiske egenskaber, idet kun objekternes geometriske og numeriske egenskaber kommer i betragtning. Matematikkens domæne er således abstrakte egenskaber ved reelle, materielle objekter, som de findes i vore omgivelser. Det betyder, at matematikken beskæftiger sig med antal og størrelsesforhold vedrørende endelige objekter, som

¹⁰Se Olaf Pedersens diskussion i Pedersen (1975), side 112ff.

f.eks. linjestykker, polygoner, keglesnit, kugler og polyedre. Uendelige objekter, som f.eks. uendelige linier og planer, kommer ikke i betragtning.

4. UENDELIGE STØRRELSER I MATEMATIKKEN

Selvom matematikken i oldtiden kun vedrørte endelige objekter, kunne man ikke undgå at støde på uendelige processer, og uendelighedsbegrebet er udførligt behandlet i Aristoteles's fysik. Han indfører distinktionen mellem potentiel og aktuel uendelighed. En proces, som kan fortsættes uden begrænsninger, kalder Aristoteles *potentielt uendelig*. At tælle de naturlige tal,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

er således en potentielt uendelig proces, idet den fremkommer ved at starte med 1 og blive ved med at lægge 1 til:

$$1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots$$

Man kan derfor med en vis ret sige, at mængden af de naturlige tal er en uendelig mængde forstået som matematisk objekt. Det er dog usikkert, om Aristoteles overhovedet ville acceptere en sådan talemåde, idet abstrakte mængder næppe var objekter i Aristoteles's forstand. Hvis man derimod betragter mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal som en afsluttet helhed, hvor tælleprocessen så at sige er blevet afsluttet, vil den være *aktuelt uendelig*. Aristoteles benægter kategorisk eksistensen af det aktuelt uendelige og at objekter overhovedet kan være uendelige (i modsætning til processer).

Aristoteles argumenterer således for, at der ikke eksisterer uendelige genstande

Enhver genstand af vilkårlig størrelse, som kan eksistere potentielt, kan også eksistere aktuelt, og derfor, da der ikke findes nogen uendelig, synlig genstand, kan der ikke findes nogen genstand, som overstiger enhver angivet størrelse: det ville betyde, at der fandtes noget større end universet.¹¹

Han argumenterer også for, at selvom der ikke findes aktuelt uendelige objekter, som f.eks. linjestykker med uendelig mange punkter, så har matematikerne alt det de skal bruge i deres arbejde

Jeg har argumenteret for, at der ikke findes en aktuel uendelig ting, som er uoverstigelig; men det fratager ikke matematikerne deres studie. Som tingene er, behøver de ikke det uendelige, fordi de ikke gør nogen brug af det. Alt hvad de

¹¹Aristotle (1996), 207^b₁₅-207^b₂₁

behøver er et endeligt linjestykke af vilkårlig, ønsket længde. Men en vilkårlig [lille] størrelse kan deles i samme forhold som en enorm stor størrelse, derfor gør det ikke nogen forskel for deres beviser om den størrelse, der foreslås, er en af dem, som faktisk findes.¹²

Det er ikke helt klart, hvad Aristoteles egentlig mener med dette. Hvis man har et endeligt liniestykke og deler det op i mindre liniestykker, så er det muligt, at dele disse små liniestykker i lige så mange, som det store stykke blev delt i. Men når det er gjort, så får vi et endnu mindre liniestykke, som også kan deles op, osv. Aristoteles synes således at måtte acceptere potentielt uendelige liniestykker.

Potentielt uendelige processer som at tælle eller at blive ved med at opdele liniestykker er nødvendige i matematikken, også i den antikke matematik, f.eks. i forbindelse med studiet af krummede figurer. Det er muligt at finde simple formler til bestemmelse af arealer af retlinede figurer. Således er arealet af en trekant en halv højde gange grundlinien, og man kan bevise denne formel uden at involvere sig med det uendelige. Anderledes forholder det sig med bestemmelse af arealer af krummede figurer. Vi ved at arealet af en cirkelskive med radius r er

$$\pi \cdot r^2$$

eller udtrykt med diameteren

$$\frac{\pi d^2}{4}$$

Denne sætning findes i Euklids elementer i en lidt anden udgave, nemlig som sætning 2 i bog XII

Cirkler forholder sig til hinanden som kvadraterne på deres diametre.

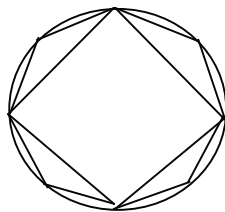
Sætningen siger i moderne form, at

$$\frac{C(d_1)}{C(d_2)} = \frac{d_1}{d_2}$$

hvor d_1 og d_2 er diametrene i cirklerne $C(d_1)$ og $C(d_2)$. Den kan imidlertid ikke bevises uden at inddrage uendelighedsbegrebet. I Euklids elementer bliver den vist ved anvendelse af *udtømningsmetoden*.

Udtømningsmetoden kan illustreres på følgende måde. Vi kender allerede arealet af regulære polygoner, som firkant, ottekant, sekstenkant, osv. For at bestemme arealet af cirkelskiven indskrives vi først en firkant i cirklen. Firkantens areal er mindre end cirkelns areal. Vi indskrives derfor en ottekant som angivet på figuren.

¹²Aristotle (1996), 207^b₂₇-207^b₃₄



FIGUR 3. Udtømningsmetoden

Ottekantens areal er større end firkantens areal, men fortsat mindre end cirkelns. Vi fortsætter med at indskrive en sekstenkant. Den har også et areal mindre end cirkelns, derfor fortsættes processen med en 32-kant, en 64-kant, osv. Ligegyldig hvor langt vi går i denne process, vil cirklen ikke blive udtømt. Men i grænsen - dvs. når processen er blevet fortsat uendeligt - når vi frem til cirkelns areal.

Men at gå til grænsen er et moderne begreb, som ikke blev anvendt i antikken. De antikke matematikere udformede beviset på en smart måde, hvor man undgik at tale om uendelighed. Når man skulle vise, at to størrelser, A og B , var lige store, så viste man, at begge påstandene $A < B$ og $A > B$ ville føre til en modstrid. I Euklids elementer var sådanne beviser ofte baseret på anvendelse af følgende sætning 1 i bog X

Når der er afsat to ulige størrelser, A og ε , og der fra den største, A , trækkes en, der er større end halvdelen, og fra resten en, der er større end halvdelen, og man bliver ved med det, vil der blive en eller anden størrelse til rest, som vil være mindre end den afsatte mindste størrelse, ε .

Dette kan illustreres med Figur 4, hvor det ses, at

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

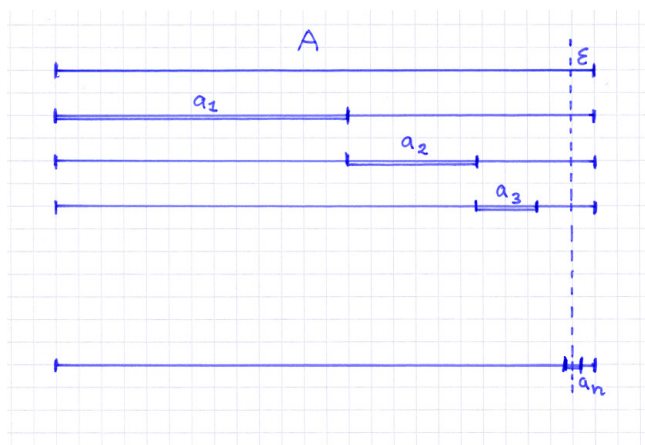
afviger mindre end ε fra A .

I beviset for Sætning XII.2 benytter Euklid netop Sætning X.1 til at vise, at både

$$\frac{C(d_1)}{C(d_2)} < \frac{d_1}{d_2}$$

og

$$\frac{C(d_1)}{C(d_2)} > \frac{d_1}{d_2}$$



FIGUR 4. Euklid, Sætning X.1

fører til modstrid, hvorfor

$$\frac{C(d_1)}{C(d_2)} = \frac{d_1}{d_2}$$

må gælde.

Man undgår på denne måde at tale om at indskrive uendeligt mange polygoner i en cirkel eller at tale om grænseværdien af summen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \cdots$$

I antikken udviklede man således også matematik for krummede figurer, selvom det, set med moderne øjne, kræver, at man kan håndtere uendelige processer. Udtømningsmetoden var en elegant måde at undgå at tale om det uendelige på. Den antikke geometri handlede således om endelige figurer og deres egenskaber. Selvom vanskelighederne med det uendelige poppede op ind imellem udviklede man en imponerende matematik, som kunne bruges til at beskrive både praktiske forhold, som f.eks. landmåling og bogholderi, og videnskabelige forhold, som f.eks. himmellegemernes bevægelse og position. Alt blev stort set udtrykt som forhold mellem endelige størrelse, jfr. Sætning XII.2. Det var et aristotelisk dogme, at der ikke fandtes forhold mellem endelige og uendelige størrelser.

Næsten alt avanceret matematik vedrører uendelige processer og størrelser. Tænk blot på de reelle tal, som spiller en afgørende rolle også i den antikke geometri. Reelle tal som f.eks. $\sqrt{2}$ og π kan ikke udtrykkes som brøker. Moderne formuleret kan de fremstilles som uendelige, ikke-periodiske decimalbrøker

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots \sim 1.41421 \cdots$$

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots \sim 3.14159\dots$$

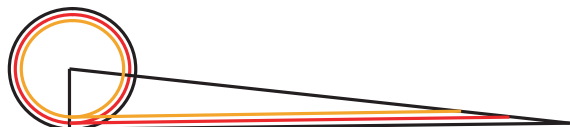
De antikke matematikere kunne i en vis udstrækning undgå at operere direkte med disse uendelige størrelser, idet de betragtede dem som forhold. Således kunne $\sqrt{2}$ opfattes som forholdet mellem siden og diagonalen i et kvadrat med kantlængde 1.

Det var netop et stort problem for de græske matematikere, at forholdet mellem diagonalen og kantlængden i et kvadrat ikke kunne udtrykkes som en brøk. Dette blev opdaget af pythagoræerne, som forsøgte at holde det hemmeligt, og det siges, at den person, som afslørede hemmeligheden led en voldsom død. De græske matematikere kom imidlertid omkring problemet med de reelle tal som uendelige størrelser netop ved at udvikle en teori om forhold mellem størrelser af samme art, f.eks. forhold mellem liniestykker. $\sqrt{2}$ er som nævnt i denne sammenhæng forholdet mellem siden og diagonalen i et kvadrat med kantlængde 1.

5. UENDELIGE FIGURER

I løbet af sen-antikken og middelalderen udviklede matematikken og dens anvendelser sig voldsomt, og det blev mere og mere nødvendigt at forholde sig til uendelige objekter og processer. Det blev vigtigt at kunne beskrive betydeligt mere komplekse geometriske konfigurationer end dem, man finder i oldtiden; og det blev efterhånden også vigtigt at kunne beskrive mekaniske bevægelser mere præcist. Udtømningsmetoden blev udviklet og suppleret med andre metoder til at bestemme areal og rumfang af krummede figurer. Denne udvikling førte i renæssancen til nye problemer med uendelige størrelser. Således udviklede Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) den såkaldte *udelelighedsmetode*, hvilket gjorde det hurtigt og nemt at bestemme arealer og rumfang af komplekse geometriske figurer.

Cavalieris udelelighedsmetode kan illustreres med følgende figur



FIGUR 5. Udelelighedsmetoden

Antag at vi skal bestemme arealet af en cirkelskive. Vi opfatter cirkelskiven som bestående af uendelig mange koncentriske cirkler som antydnet på figuren. Nu tegner vi først den retvinklede trekant med et hjørne i centrum af cirkelskiven, radius som den ene side, og grundlinien vinkelret på radius

og af samme længde som cirkelskivens ydre cirkel. Vi gør det samme med den næste cirkel og fortsætter indtil vi når centrum af cirkelskiven. Lægger vi alle de tynde cirkler, som cirkelskiven består af, sammen, får vi cirkelskivens areal. Men den yderste cirkel har samme længde som grundlinien i den yderste trekant, den næste cirkel har samme længde som grundlinien i den næste trekant, osv. Derfor har cirkelskiven samme areal som den yderste retvinklede trekant. Men denne trekants areal er $\frac{1}{2}$ gange højde gange grundlinie, moderne udtrykt $\frac{1}{2} \cdot r \cdot (2\pi r)$, idet grundlinien har samme længde som den ydre cirkels længde, som er $2\pi r$. Det betyder, at cirkelskivens areal bliver πr^2 .

På denne måde kunne man med Cavalieris metode vise, at bestemte krummede geometriske former havde samme areal som visse retlinede former. Dette skete ved at snitte de krummede former op i passende uendeligt tynde skiver. Denne metode var yderst effektiv, men den rejste igen problemer med uendelighedsbegrebet. De uendeligt tynde cirkler, som cirkelskiven blev skåret op i, kunne naturligvis ikke have et areal. Så hvordan kunne man få cirkelskivens areal ved at skære den op i kurver uden areal, men med længde. Det synes at være begrebsligt umuligt, men ikke desto mindre virker metoden. Matematikerne havde hermed et forklaringsproblem.

Problemerne med uendelighedsbegrebet blev imidlertid endnu mere radikaliseret i det 17. århundrede. Evangelista Torricelli (1608-1647) viste i 1641, at en uendelig lang figur kunne have et endeligt rumfang¹³. Torricellis figur fremkommer ved at rotere en hyperbel om x-aksen, som angivet på Figur 6, og tage det runde tragtformede rør fra punktet **a** til uendelig.

Torricelli viste, at dette rør havde samme rumfang som cylinderen fra 0 til **a** på figuren. Han gav i virkeligheden to beviser for dette, nemlig et bevis baseret på udtømningsmetoden og et baseret på Cavalieris uendelighedsmetode.

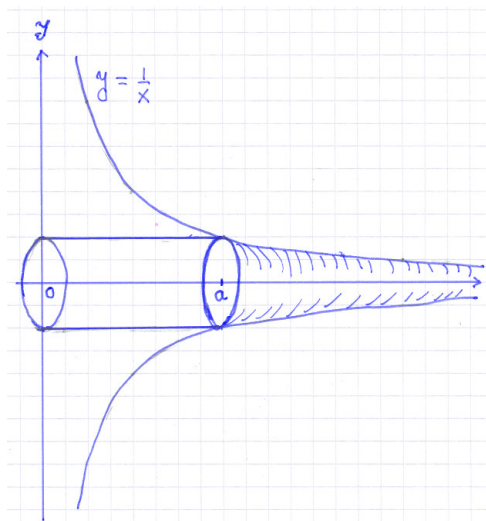
Dette resultat stred imidlertid mod det aristotelisk dogme, at forhold mellem endelige og uendelige størrelser ikke fandtes. Men på den anden side måtte datidens matematikere dog anerkende, at beviserne var korrekte. Enten måtte man antage resultatet som gyldigt og dermed bryde det aristoteliske dogme, eller man måtte indrømme, at de matematiske metoder, man benyttede sig af, ikke var gyldige. Begge synspunkter blev forsvaret.

En filosof, som argumenterede imod Torricellis resultat, var Thomas Hobbes (1588-1679). Geometrien var for Hobbes den eneste egentlige sikre videnskab, som alle andre videnskaber skulle baseres på

den eneste videnskab, som Gud hidtil har skænket menneskeheden.¹⁴

¹³Dette eksempel er udførligt behandlet i artiklen Mancosu and Vailati (1991)

¹⁴Mancosu and Vailati (1991), side 70



FIGUR 6. Torricellis uendelige figur

Hobbes' opfattelse mindede lidt om Aristoteles's opfattelse af geometriske objekter som abstraktioner ud fra egentlige materielle objekter. Geometriske liner, flader og figurer eksisterede kun i den udstrækning, de blev frembragt af reelle, materielle legemer i bevægelse. Det betød naturligvis, at der ikke kunne findes egentlige uendelige objekter. Uendelighed skulle forstås som uafsluttethed, og kun afsluttede objekter fandtes, hvilket betød, at uendelige objekter ikke kunne findes.

Hobbes anerkendte i virkeligheden Torricellis beviser, selvom hans forståelse især af udelelighedsmetoden var yderst mangelfuld. Men han forsøgte forgæves at omfortolke Torricellis resultat for at passe det ind i sin filosofi. Dette, og andre af Hobbes' kritikpunkter af datidens moderne matematik, fik den engelske matematiker John Wallis (1616-1703) til at udsætte Hobbes for en voldsom kritik. Om Torricellis resultat skriver Wallis

det berømte problem (i virkeligheden genialt og meget beundringsværdigt), som Torricelli fremlagde i form af en rumlig figur (dvs. konstruerede en cylinder som var lig med [havde samme rumfang som] den spidse hyperbolske figur [Torricellis uendelige tragt i Figur 6] forlænget til det uendelige), har vi fremvist i form af utællelig mange andre figurer både plane og rumlige.¹⁵

Striden mellem Hobbes og Wallis var hård, bitter og uvenlig, og det lykkedes Wallis nærmest at latterliggøre Hobbes. Selvom Hobbes argumenter langt hen ad vejen var filosofisk kohærente og sammenhængende, var de

¹⁵Citeret fra Mancosu and Vailati (1991), side 66

langt fra tilstrækkelige til at overbevise matematikerne om, at de havde problemer med de nye særdeles frugtbare metoder, som blev udviklet i det 17. århundrede.

Her viser matematikkens filosofiske betydning sig, idet de nye matematiske metoder - videreudviklingen af udelelighedsmetoden, aritmitiseringen af geometrien og brugen af uendelige rækker, osv. - muliggjorde at man kunne konstruere realistiske eksempler på uendelige størrelser, som kunne behandles på en stringent måde. Ligesom de antikke matematikeres og filosofers begrebssystem blev væsentligt udvidet, da man opdagede, at ikke alle størrelser, f.eks. diagonalen i et kvadrat, kunne måles med hele tal og brøker, men krævede de irrationelle tal, førte undersøgelserne af uendelige geometriske objekter til væsentlige udvidelser af det matematiske begrebsapparat, udvidelser som efterhånden gjorde det muligt at håndtere og forstå mange forskellige former for uendelige størrelser. De matematiske eksempler havde ikke form af luftige filosofiske tankeeksperimenter, som kentaurusser, onde dæmoner og engle. Der var tale om matematiske objekter, som enhver kunne konstruere og studere i detaljer. De kunne ikke bortelimineres. Både videnskaberne og filosofien måtte indrette sig efter dem.

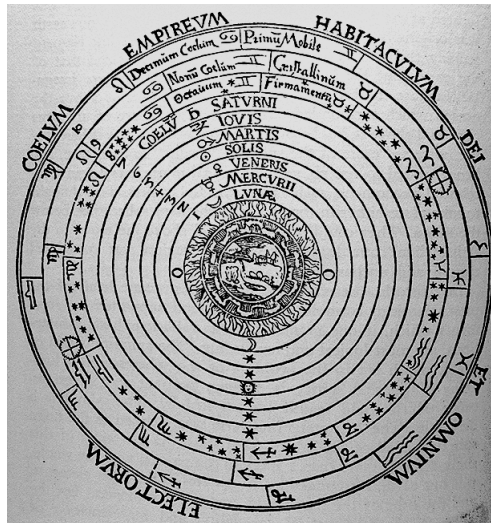
6. ET ENDELIGT UNIVERS UDEN GRÆNSER

Ikke kun i matematikken havde man vanskeligheder med at håndtere uendelighedsbegrebet. Siden Platon og frem til renæssancen opfattede astronomer, matematikere og filosoffer kosmos som bestående af koncentriske cirkelskaller, som vist på Figur 7. Platon begrundede universets kugleform på denne måde

Og han [verdens skaber] gav den [verden] den rumlige figur, der måtte være den rette, og som stemte med dens natur. For det levende væsen, der i sig selv skulle omslutte alle levende væsener, må den passende figur være den, der i sig selv indeholder alle eksisterende figurer. Derfor drejede han den sådan, at den blev sfærisk og rund, med overalt samme afstand fra centrum til det yderste, den figur, der er mest fuldendt og mest lig sig selv. . . . Og rundt på hele ydersiden glattede han den fuldstændig, af mange grunde. . . . For intet kom ud af den, intet kom ind i den noget steds fra - der var nemlig ikke noget.¹⁶

Verden var således en endelig kugle, og, som det fremgår af Figur 7, sidder de forskellige himmellegemer på kugleskaller inden for den yderste

¹⁶Platon (1932-1941), 30c

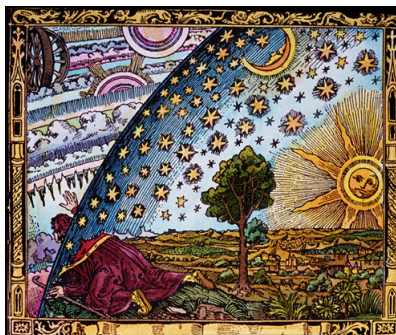


FIGUR 7. Renæssanceudgave af det Ptolomæiske Verdensbillede

skal. Der er intet uden for den yderste skal. Dette var i god overensstemmelse med det aristoteliske dogme, at alle virkelige objekter - selv hele universet - var endelige. Dette verdensbillede blev forfinet af den græske astronom Ptolomæus (83 - 161 e.Kr.) og holdt sig med forskellige forbedringer helt frem til det 17. århundrede.

I slutningen af middelalderen og renæssancen ophobede der sig mange både empiriske og teoretiske problemer for det Ptolomæiske system. På det empiriske plan førte Tycho Brahes (1546 - 1601) præcise observationer af kometer til, at man måtte antage, at de bevægede sig på tværs af de skaller, som holdt planeterne. De himmelske skaller kunne derfor ikke være evigt uforanderlige. Johannes Keplers (1571 - 1630) påvisning af at planeterne bevægede sig i ellipser rundt om Solen, Galileo Galileis (1564 - 1642) argumenter mod Aristoteles's fysik, samt mange andre argumenter, var også med til at vælte det ptolomæiske verdensbillede. Det var især udviklingen af den eksperimentelle og matematiske astronomi, som førte til det nye heliocentriske verdensbillede. Vi skal imidlertid ikke fordybe os i verdensbilledets historie, men blot fremhæve et filosofisk problem med det ptolomæiske verdensbillede, som først kunne løses ved anvendelse af nye avancerede matematiske begrebsdannelser.

Følgende renæssancetræsnit (Figur 8) viser tydeligt et problem for det endelige, kugleformede univers. Hvis Kosmos bestod af en endelig kugle med Jorden i centrum, så ville det i princippet være muligt at rejse langs en radius ud til den yderste kugleskal, og måske, som personen i Figur 8, stikke hovedet ud af skallen. Dette rejser spørgsmålet: Er det overhovedet



FIGUR 8. Hvad er der uden for Verdenskuglen?

muligt at have et endeligt univers, hvor man kan rejse fri og ubesværet i alle retninger uden på noget tidspunkt at ramme en ydre grænse? Det er klart, at en kugle ikke giver den mulighed. Rejser man langs en radius vil man før eller senere møde den ydre grænse i form af kuglens overflade.

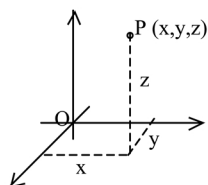
Men lad os forestille os, at vi var todimensionale individer og levede på en kugleoverflade. Hvis det var tilfældet, så levede vi faktisk i et endeligt univers, hvor vi kunne bevæge os frit. Vi ville komme tilbage til udgangspunktet, hvis vi bevægede os i en bestemt, fast retning, men der ville ikke være noget, der kunne stoppe os. Vi ville aldrig nå en grænse. Et nærliggende spørgsmål er nu, om det er muligt at konstruere et tredimensionalt, endeligt rum, hvor det også ville være muligt at bevæge sig frit. Matematikkens udvikling efter det 17. århundrede har vist, at det er muligt.

7. MANGFOLDIGHEDER

Lad os først diskutere, hvad vi egentlig skal forstå ved et rum. Siden *Euclid's Elementer* har det været almindeligt at betragte rummet som værende det sædvanlige tredimensionale euklidiske rum, dvs. rummet som beskrevet ved tre koordinataksler - højde, længde og bredde - som står vinkelret på hinanden. I dette rum kan vi lokalisere et vilkårligt punkt ved angivelse af tre tal, dvs. tre koordinater i et koordinatsystem som illustreret på Figur 9. Vi har også veldefinerede mål for afstande og vinkler. F.eks. kan afstanden fra O til P udtrykkes ved P's koordinater. Den bliver

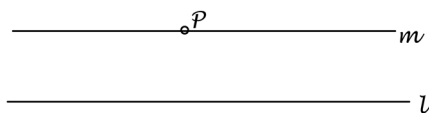
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Det tredimensionale rum dannede grundlaget for Isaac Newtons (1642 - 1727) klassiske fysik, som har præget vort verdensbillede frem til begyndelsen af det 20. århundrede. Men allerede siden oldtiden var man usikker på, om rummet nu også var så simpelt. Det var især spørgsmålet om parallelitet, der skabte problemet. Det er et aksiom i euklidisk geometri, at

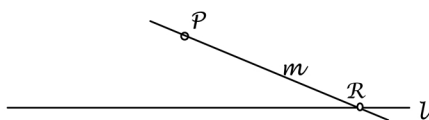


FIGUR 9. Tredimensionalt koordinatsystem

man gennem et punkt P uden for en ret linie l kan trække højst en ret linie m parallel men l . Men siden Euklids tid har man tvivlet på, om dette var

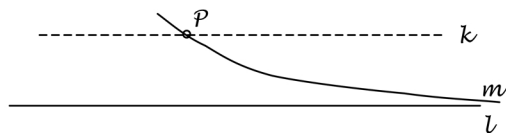

FIGUR 10. m parallel med l

en korrekt antagelse. Man kunne f.eks. forestille sig følgende eksperiment. Antag givet et punkt P , en linie l , som P ikke ligger på, og en linie m , som går igennem P og skærer l i R . Lad nu punktet R bevæge sig mod højre.


FIGUR 11. m skærer l i R

Hvad sker der, når R fortsætter ubegrænset mod højre? Vil R i det uendeligt

fjerne springe diskontinuert op på niveau med P , så m bliver parallel med l , eller vil vi få en situation, som angivet på figuren, hvor m aldrig vil komme



FIGUR 12. m nærmer sig asymptotisk til l

til at skære l . I dette tilfælde vil m og l også være parallelle. Men hvis dette var tilfældet, ville linien k gennem P også være parallel med l , i modstrid med parallelaksiomet.

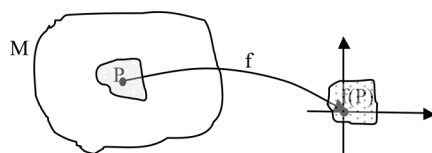
Man forsøgte faktisk at give et matematisk bevis for, at denne situation ikke kunne opstå. Resultatet af disse forsøg blev ikke, at man fandt en modstrid, men derimod at man i begyndelsen af det 19. århundrede erkendte, at det faktisk var muligt at udvikle en geometri, hvor der igennem P kunne trækkes uendeligt mange linier parallelle med l . Den første officielle ikke-euklidiske geometri blev formuleret af hhv. Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 - 1856) og János Bolyai (1802 - 60). Senere i det 19. århundrede blev det også vist, at disse nye geometrier - der var nemlig mange muligheder, også nogle hvor der slet ikke fandtes parallelle linier - var modsigelsesfrie, hvis den klassiske euklidiske geometri var det. Man var derfor i den situation, at der fandtes mange forskellige geometrier, som i en vis forstand var lige gode, og som hver især kunne være den geometri, som udtrykte strukturen af det rum, vi lever i. På denne måde blev spørgsmålet om rummets natur radikaliseret. Der fandtes nu flere forskellige matematiske objekter (geometrier), som alle i princippet kunne være den geometri, som vort virkelige rum var underlagt.

Læg mærke til, at udviklingen af de ikke-euklidiske geometrier også gjorde det krystalklart, at matematiske og fysiske objekter ikke er det samme. Der findes mange geometrien, men højst en af dem kan være rummets geometri og derfor være fysisk realiseret. Men de øvrige geometrier er dog stadigvæk reelle matematiske størrelser, som vi kan kommunikere objektivt om, og som i øvrigt har mange praktiske anvendelser.

Spørgsmålet om, hvad vi skal forstå ved rum og geometri fik et første præcist svar i George Friedrich Bernhard Riemanns (1826- 1866) doktor-disputats *Über die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen* (Om de

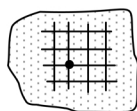
hypoteser som ligger til grund for geometrien) fra 1854. Dette lille matematiske skrift, der også kan betragtes som en filosofisk analyse af rumbegrebet, indvarslede en helt ny forståelse af rum og geometri, som først langt ind i det 20. århundrede er blevet fuldt ud forstået. Riemanns idé var først at give en meget abstrakt definition af et rum, som derefter kan udstyres med en struktur, hvorved man får en geometri.

Ved et rum forstår vi en samling af punkter, som er udstyret med lige netop så meget struktur, at vi kan tale om, hvorvidt to punkter ligger tæt ved hinanden. En sådan struktur kaldes et *topologisk rum*. Lad M være et topologisk rum og P et punkt i M . Antag, at der findes en afbildning f , som på en entydig måde sender P over i et punkt, $f(P)$, i den euklidiske plan og området omkring P over i området omkring $f(P)$. I den euklidiske plan kan



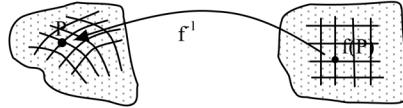
FIGUR 13. Transformation af området omkring P ind i den euklidiske plan

vi tale om parallelle linier, som udgør koordinatlinier. Disse koordinatlinier



FIGUR 14. Koordinatlinier i den euklidiske plan

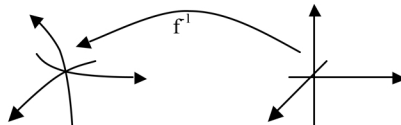
kan vi sende over til M via den omvendte afbildning, f^{-1} , til f . Det giver et system af krummede koordinatlinier omkring P , hvilket betyder, at vi godt kan tale om koordinater omkring P , selvom området omkring P er krumt. Vi kan gøre det samme med alle andre punkter i M , idet vi må forlange, at når områderne omkring to punkter P og Q i M overlapper, kan kortene i



FIGUR 15. Koordinatlinier transformeret tilbage til mangfoldigheden M

dem harmoniseres så begge kan bruges og vil give samme resultat. På den måde får vi et system af kort - et atlas - som kortlægger hele M . Dette er helt i stil med at have et atlas over Jordkloden. Hvert kort i atlasset er et plant stykke papir, som f.eks. kortlægger Danmark, og som kan harmoniseres med kort over Sverige, Norge og Tyskland.

Et topologisk rum M , der har et atlas, som beskrevet, kaldes en *mangfoldighed*. Vi har beskrevet en todimensional mangfoldighed, idet kortene er todimensionale. Men der er ikke noget til hinder for, at vi kunne have tredimensionale kort. I det tilfælde ville ethvert punkt i M være omgivet af et tredimensionalt netværk, som via en afbildning kunne rettes ud til et retvinklet tredimensionalt netværk. Vi behøver i virkeligheden ikke stoppe ved tre

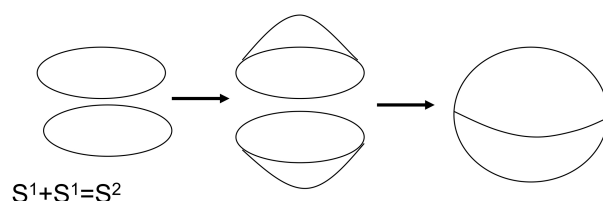


FIGUR 16. Tredimensionalt netværk

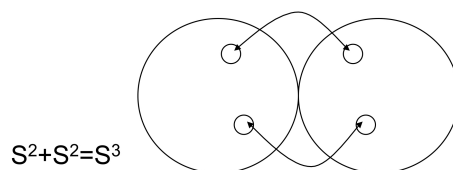
dimensioner. Der er intet til hinder for, at vi kan indføre 4-dimensionale, 17-dimensionale eller uendeligdimensionale rum. . F.eks. er der meget, der tyder på, at vores fysiske rum på det globale plan er en 4-dimensionale mangfoldighed, og i kvantemekanikken opererer man med uendeligdimensionale mangfoldigheder.

Nu kan spørgsmålet, om det er muligt at finde eller konstruere et endeligt tredimensionalt rum, hvor man kan bevæge sig frit uden at støde på en ydre

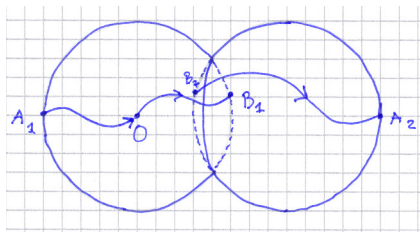
grænse, gives en præcis matematisk formulering: Er det muligt at konstruere en endelig tredimensional mangfoldighed uden rand? Svaret er ja, og den simplest mulige er den tredimensionale kugleoverflade, som vi vil betegne S^3 . Vi har allerede set, at den todimensionale kugleoverflade, S^2 , som også er en todimensional mangfoldighed, er endelig og ikke har nogen rand. Den todimensionale kugleoverflade, S^2 , er en naturlig flade i det tredimensionale rum, og vi kan konstruere den ved at bule to cirkelskiver ud og sy dem sammen (randen på en cirkelskive er den endimensionale kugleoverflade, S^1 , og cirkelskiven er den todimensionale kugle).


FIGUR 17. Kugleoverfladen S^2

Tilsvarende er den tredimensionale kugleoverflade en naturlig tredimensional flade i det firdimensionale rum. Vi kan fremstille den ved at sy to sædvanlige kugler sammen i analogi til konstruktionen af S^2 . Vi kan desværre ikke visuelt forestille os det firdimensionale rum. Men konstruktionen kan illustreres ved følgende diagram (Figur 18). Ideen er, at vi syr to sædvanlige


FIGUR 18. Kugleoverfladen S^3

kugler sammen langs overfladen punkt for punkt som antydnet på diagrammet. Det kan vi ikke gøre i tre dimensioner uden gennemskæringer. Men vi kan gøre det i fire dimensioner uden gennemskæringer, dog uden at kunne visualisere det direkte. Resultatet bliver, at vi får en endelig mangfoldighed, hvor vi kan bevæge os frit uden at møde en ydre grænse. Dette kan illustreres på følgende måde (Figur 19). Vi starter i centrum O i den første kugle og bevæger os til højre mod kugleoverfladen og når kugleoverfladen i punktet $B1$. Men $B1$ er samme punkt som $B2$, idet $B1$ og $B2$ er syet sammen. Fra $B2$ går vi mod punktet $A2$, som imidlertid er det samme som $A1$, da $A1$ og $A2$ er syet sammen. Herfra går turen tilbage til O . På grund af sammensyningen har vi på intet tidspunkt ramt en ydre grænse.

FIGUR 19. Lukket kurve på S^3

På denne måde har vi konstrueret et matematisk objekt, den tredimensionale kugleoverflade, som er en mangfoldighed, der kunne være vort fysiske rum. Den er tredimensional, endelig, simpelt sammenhængende og har ingen ydre grænse. Matematikken har således vist, at det giver god mening at forestille os, at vi lever i en endelig, tredimensional verden, hvor det ikke er noget udenfor. Lige gyldig i hvilken retning, vi rejser, vil vi aldrig nå en grænse. Aristoteles ville have elsket denne konstruktion!

Den tredimensionale kugleoverflade har imidlertid en overraskende interessant egenskab. Vi siger at to mangfoldigheder er *homeomorfe*, hvis de kontinuert kan deformeres til hinanden. Således er en kasse og en kugle homeomorfe (man kan deformere kassen kontinuert til en kugle), hvorimod en kasse og en cykelring ikke er homeomorfe, idet det ikke er muligt at deformere kassen til en cykelring uden at skære den op. To homeomorfe mangfoldigheder er, set fra et topologisk synspunkt, i det væsentlige identiske. I 1904 formulerede Henry Poincaré (1854 - 1912) den hypotese, at enhver endelig, tredimensional, enkeltssammenhængende mangfoldighed er homeomorf med den tredimensionale kugleoverflade. Poincaré var imidlertid ikke i stand til at vise denne hypotese, og den har stået ubevist i ca. hundrede år. I 2002 publicerede den russiske matematiker Grigory Perelman (1966 -) elektronisk en artikel, som i de efterfølgende år skulle føre til det endelige bevis for Poincaré hypotese. Perelman bevis var så komplekst, at det tog det matematiske samfund flere år at blive enig om, at det efter visse korrektioner var korrekt. I 2006 fik Perelman The Field Medal for at have bevist Poincarés hypotese.

Det erkendelsesteoretiske interessante ved Poincaré hypotese er, at den siger os, at der i virkeligheden kun findes én tredimensional, endelig, enkeltssammenhængende mangfoldighed. I virkeligheden findes der mange forskellige tredimensionale mangfoldigheder. Ligesom vi kunne fremstille S^3 ved at sy to kugler sammen, så kunne vi få andre tredimensionale mangfoldigheder ved at sy andre geometriske former sammen. Vi kan på den måde fremstille uendeligt mange forskellige (ikke homeomorfe) tredimensionale

mangfoldigheder. På tilsvarende vis kan vi fremstille uendeligt mange forskellige todimensionale mangfoldigheder. Men de todimensionale mangfoldigheder kan klassificeres, hvilket ikke er muligt for de tredimensionale. Og i virkeligheden ser alle de forskellige tredimensionale mangfoldigheder ens ud på det lokale plan, idet deres kort ser ens ud. Ligesom vi kun kan få et billede af Jordkloden enten ved at se på kort, eller ved at tage ud i rummet og se ned på den, så kan vi kun få et billede af den tredimensionale mangfoldighed, vi lever i, ved at se på dens kort. Vi har ingen mulighed for at rejse udenfor verdensrummet og se ned på det, som vi kan med Jordkloden. Derfor har vi kun de tredimensionale kort som kilde til at forestille os, hvordan vort kosmos ser ud. Det betyder, at vi kun kan beskue verdensrummet fra en lokal vinkel. Men da de uendeligt mange forskellige tredimensionale mangfoldigheder, set fra et lokalt synspunkt, ikke vil kunne skelnes fra hinanden, har vi umiddelbar ikke nogen mulighed for at afgøre, hvordan kosmos ser ud.

Da Poincaré hypotese har vist sig at gælde, rejser der sig imidlertid nye muligheder. Nu ved vi med sikkerhed, at der kun findes én endelig, tredimensional, enkeltsammenhængende mangfoldighed. Kunne vi ud fra vore fysiske, astronomiske og andre teorier vise, at verdensrummet var endeligt, tredimensionalt og enkeltsammenhængende, så ville vi være sikre på, at vi levede i et rum, der havde samme struktur som S^3 .

8. MATEMATIKKENS NATUR

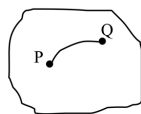
Vi har nu set forskellige historiske eksempler på matematiske konstruktioner. De simpleste er ret uproblematisk, og vi lærer dem i skolen. Det gælder f.eks. elementær geometri, hvor vi lærer at konstruere cirkler, ellipser, polygoner og andre endelige geometriske figurer. Tilsvarende lærer vi de naturlige, hele, rationelle og reelle tal at kende. Vi lærer at manipulere tallene og anvende dem til bestemmelse af geometriske figurers arealer og rumfang. Derudover lærer vi også forskellige algoritmer til at genere irrationelle tal samt algebraiske metoder til løsning af ligninger. Så længe vi ikke stiller for dybe spørgsmål, er denne elementære matematik uproblematisk og særdeles anvendelig. Tallene, de geometriske former, algoritmerne og de algebraiske regler (i form af computerprogrammer og -instruktioner) er med os overalt i dagligdagen.

Det giver således god mening at hævde, at vi har en elementær, objektivt tilgængelig matematik til rådighed. Den består af forskellige former for objekter, nemlig de simple naturlige tal, simple, endelige geometriske former og simple algebraiske regler og relationer. At benægte disse størrelser objektiv eksistens ville være lige så tåbeligt som at benægte vort sprogs

objektive eksistens. De udgør ligesom sproget basale elementer i vor opfattelse af virkeligheden og er nødvendige for vor forståelse af os selv og vor omverden.

Foruden de elementære matematiske objekter har vi også forskellige metoder til konstruktion af nye objekter. Konstruktionen af S^3 og af de reelle tal hviler på veldefinerede konstruktionsmetoder. Endvidere er vi i stand til at bevise matematiske sætninger ved anvendelse af logikkens regler.

Matematikerens arbejde består i på grundlag af eksisterende objekter og sætninger at konstruere nye objekter og formulere og bevise nye matematiske sætninger, som gerne skulle tjene fornuftige formål, som f.eks. at give en dybere forståelse af rummets natur eller at føre til nye løsninger og fortolkninger af vigtige ligninger som eksempelvis de ligninger, der beskriver elementarpartiklernes natur. Man kan med en vis ret sammenligne en matematiker med en bygningsingeniør, som ud fra eksisterende materiale designer, konstruerer og vedligeholder nye bygningsværker og samtidig giver tvingende argumenter for, at konstruktionerne holder. Matematikere har igennem historien udviklet metoder til at konstruere nye objekter, som f.eks. mangfoldigheder af mange dimensioner med mærkelige mål for afstande og vinkler. Et eksempel er 4-dimensionale mangfoldigheder, hvor afstanden $l(P, Q)$ mellem to punkter, P og Q , varierer med lokaliteten. Spørgsmålet



FIGUR 20. Afstand mellem P og Q

rejser sig nu, om disse og mange andre komplekse objekter eksisterer eller blot er kimærer i matematikernes hoveder. Her kan vi igen sammenligne med bygningskunsten. De højhuse og broer, som ingeniørerne skaber, eksisterer og er lavet af materiale, vi har tillid til. Men vi har intet endeligt bevis for, at de ikke vil bryde sammen. Tilsvarende er de 4-dimensionale mangfoldigheder konstrueret ved at sammensætte mange forskellige simple matematiske objekter, som vi har objektivt kendskab til, ved anvendelse af konstruktionsmetoder, som vi også kan anvende på en objektiv måde. Endvidere er vi i stand til at give objektivt tilgængelige beviser for de nye objekters egenskaber. Matematikken, dens objekter, sætninger, beviser og metoder, er således objektivt tilgængelig. Hvis vi tror på den objektive eksistens af matematikkens elementære objekter - de naturlige tal, simple

geometriske former, osv. - og de metoder, vi anvender til at konstruere nye komplekse objekter og bevise egenskaber ved dem, så er der lige så god grund til at tro på eksistensen af de komplekse objekter, som der er til at tro på eksistensen af de huse, der er bygget af virkelige mursten.

Der er dog det problem ved de matematiske konstruktioner, at de vedrører det uendelige. Vi har set, at uendelighedsbegrebet er nødvendigt i matematikken, og at det giver anledning til mange problemer. Nogle af de metoder, vi anvender til at håndtere uendelige processer med, er uproblematisk. Når vi f.eks. indfører det irrationale tal π som en uendelig sum af tal, som genereres efter en regel

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

er der ikke noget problem. Formlen giver os en metode til at få finere og finere tilnærmelser til π . Men når vi tale om vilkårlige irrationelle tal, hvor vi ikke har noget kendskab til den måde disse uendelige objekter er genereret på, har vi et problem. Det er som at gå ind i et hus, der endnu ikke er bygget færdigt.

Lad a og b være to vilkårlige irrationelle tal, hvor vi ikke kender nogen regel efter hvilken decimalerne i dem er genereret. a og b er uendelige decimalbrøker

$$\begin{aligned} a &= a_1, a_2 a_3 a_4 \cdots \\ b &= b_1, b_2 b_3 b_4 \cdots \end{aligned}$$

Decimalerne fortsætter i det uendelige uden at vi har kendskab til, hvad den næste decimal vil være. Hvordan skal vi afgøre om $a = b$ eller $a \neq b$? Da vi ikke ved, hvordan a og b genereres, er vor eneste mulighed at sammenligne decimalerne. Vi starter med a_1 og b_1 . Hvis de er lig hinanden, går vi til a_2 og b_2 . Er de lig hinanden, går vi til a_3 og b_3 . Er de lig hinanden, fortsætter vi med a_4 og b_4 , osv. Hvis vi kommer til et n , hvor a_n og b_n er forskellige, ved vi, at a og b er forskellige. Men hvis a og b er identiske, får vi aldrig noget svar. Vi kan fortsætte med at sammenligne decimaler til dagens ende uden at få svar. Vi har derfor som mennesker ingen mulighed for at få et svar. Vi må erkende, at identitet mellem uendelige objekter er en egenskab, som vi ikke altid vil være i stand til at afgøre.

Der er nu to muligheder. Enten antager vi, at det altid er sandt, at $a = b$ eller $a \neq b$, ligegyldigt om vi vil være i stand til at finde ud af det eller ej. Eller vi antager, hvis vi principielt ikke er i stand til at afgøre om $a = b$ eller $a \neq b$, så kan vi ikke længere generelt hævde $a = b$ eller $a \neq b$.

Hvis vi vælger den sidste mulighed, så vil vi få et system af reelle tal, hvor ulighed og lighed mellem tallene ikke uden videre er defineret. Det vil f.eks. betyde, at vi ikke uden videre vil kunne identificere punkter på en kontinueret linie, bl.a. fordi vi ikke vil kunne tale præcist om punkter,

der ligger meget tæt ved hinanden. Kontinuitet og sammenhæng i rummet vil blive besværlige størrelser. Men tænker vi nærmere over det, er kontinuitet og sammenhæng ret indviklede størrelser. Ligegyldigt hvor tæt ved hinanden to forskellige punkter ligger på en linie, kan vi altid finde et punkt imellem dem, og ikke nok med det, vi vil kun kunne bestemme punkters beliggenhed inden for visse intervaller. Den kontinuerte linie synes derfor at kunne sammenlignes med en træg væske, hvori vi kan lokalisere små dråber men aldrig de enkelte molekyler. At tale om punkter i et kontinuum er en idealisering. Det er lige så umuligt at identificere dem som molekylerne i væsken.

Antager vi den første mulighed, vil den kontinuerte linie se ud som perler på en snor, der ligger meget tæt. Der vil naturligvis fortsat gælde, at der for to forskellige punkter altid kan findes et imellem dem. Men det giver dog god mening at tale om punkter på kontinuet. Det svarer til at kunne lokalisere væskens enkelte molekyler.

Konsekvensen af dette bliver, at når talen er om uendelige størrelser, så er der flere veje at gå. Enten kan vi i modsætning til Aristoteles antage, at de uendelige størrelser findes derude, og at vi har access til dem igennem matematisk tænkning. Hermed er vi i en vis forstand tilbage til Platons *realisme*. Det betyder, at vi vil tillade ret vidtgående matematiske konstruktionsmetoder, som muliggør f.eks. at opfatte liniestykker som rækker af overalt tæt liggende punkter. Mange moderne matematikere anlægger dette synspunkt. Den moderne matematiks rigdom på teorier og metoder med fornemme anvendelser i fysik, astronomi, datalogi, biologi, osv. vidner om denne klassiske matematiks succes. Dens resultater er tilgængelige og forståelige for alle, der vil gøre sig den store ulejlighed at sætte sig i dens teorier og metoder. På det filosofiske plan har man dog visse problemer. Da man accepterer det aktuelt uendelige uden i virkeligheden at have direkte access til det, bygger man på metoder, som kun en omnipotent Gud ville kunne beherske fuldt ud. Derfor kan vi ikke altid være sikker på bygningsværkernes holdbarhed. Selvom de moderne matematiske resultater virker både rigtige, anvendelige og perspektivrige, må vi indrømme en hvis usikkerhed med hensyn til deres konsistens. Vi løber en sikkerhedsrisiko ved at acceptere det aktuelt uendelige og mene, at vi kan håndtere det med ikke-konstruktive metoder, som f.eks. at acceptere, at $a = b$ eller $a \neq b$ altid gælder selv for uendelige objekter.

Vi kan også i Aristoteles's ånd acceptere, at vi er endelige væsener, som aldrig vil være i stand til at kunne håndtere det aktuelt uendelige, men må nøjes med at lave matematik om det potentielt uendelige. Det betyder, at kontinuet bliver som den træge væske omtalt ovenfor. Matematikken får i denne udgave et mere sikkert grundlag, men kommer samtidig til at se betydelig anderledes ud.

Det uendelige rækker ud over menneskets erkendeevner. Derfor må vi behandle det med forsigtighed. De fleste matematikere anlægger det dristige synspunkt, at vi er i stand til at håndtere identitet mellem uendelige størrelser, hvilket betyder, at vi altid kan hævde, at $a = b$ eller $a \neq b$, eller mere generelt, at den logiske regel *tertium non datur* altid gælder:

p eller ikke- p , for alle udsagn p

Hermed indføres der avancerede konstruktionsmetoder, hvor vi intet be-læg har for nogle af de konstruerede elementers eksistens. Men konstruk-tionerne er objektivt tilgængelige, idet moderne matematikere er meget om-hyggelige med at præcisere de antagelser, konstruktionerne hviler på.

En mindre del af det internationale matematiske miljø er betænkelig ved majoritetens dristighed og begrænser sig til kun at acceptere det potentielt uendelige. Det gør, at matematikken kommer til at se betydeligt anderledes ud. Der er ikke kun tale om, at denne mere restriktive, *anti-realistiske* ma-tematik bliver en begrænset del af den klassiske matematik. For at kunne håndtere kontinuerte processer er det nødvendigt at indføre nye særdeles originale begreber, som afviger væsentligt fra de klassiske. På denne måde får man nye overraskende resultater især vedrørende kontinuerte processer, som har fundet interessante anvendelser især i datalogi.

Moderne matematik kan således udvikles i forskellige retninger, som al-le bidrager væsentligt til den menneskelige erkendelses udvikling. Ligesom byggekunsten er rig på nye projekter og stile, der bidrager til vor kulturs udvikling, er matematikken rig på ideer, metoder og begrundelsesformer, som er i indbyrdes konkurrence, men som alle beriges vor forståelse af vir-keligheden.

LITTERATUR

- Aristotle (1996). *Physics*, Oxford University Press.
- Aristotle (1998). *The Metaphysics*, new ed edn, Penguin Books Ltd.
- Euclid (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg. Vol. I: Introduction and Books I, II. Vol. II: Books III–IX. Vol. III: Books X–XIII and Appendix*, Dover Publications Inc., New York. Translated with introduction and commentary by Thomas L. Heath, 2nd ed.
- Mancosu, P. and Vailati, E. (1991). Torricelli's infinitely long solid and its philosophical reception in the seventeenth century, *Isis* **82**(311): 50–70.
- Pedersen, O. (1975). *Matematik og Naturbeskrivelse i Oldtiden*, Akademisk Forlag, København.
- Plato (360 B.C.). *The Republic*.

Platon (1932-1941). *Timaios*. Bind 8 i *Platons Skrifter i Oversættelse / udg. ved Carsten Høeg og Hans Ræder* København : C. A. Reitzel, 1932-1941.
- 10 bd. Høeg, Carsten ; Ræder, Hans., C. A. Reitzel.