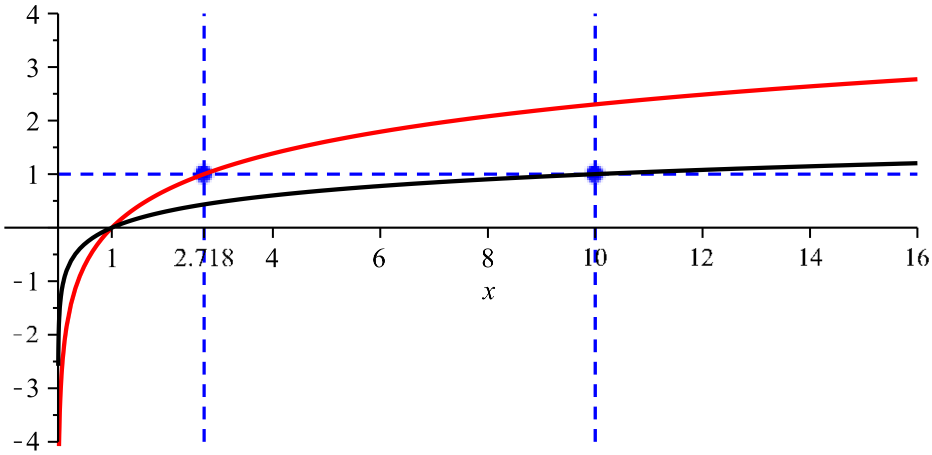
Logaritme funktioner 1

John V Petersen



Logaritme funktioner 1

art-science-soul

Indhold

Logaritme funktioner

$$\boxed{f(x) = \log_c(x)}$$

Definition 1
Hvis $\log_c(x)$ er en logaritmefunktion med grundtal c , så gælder der :

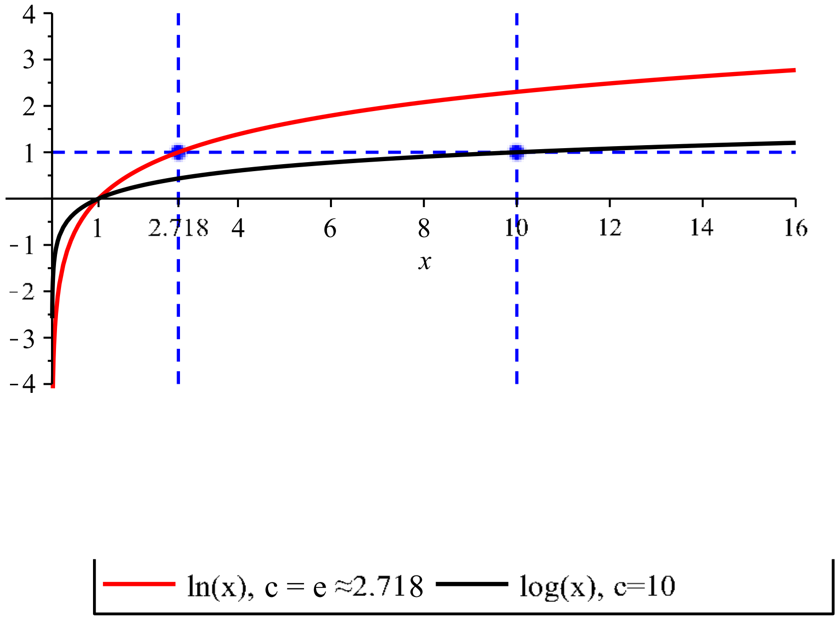
1. $Dm\left(\log_c\right) = \mathbb{R}_+$ og $Vm\left(\log_c\right) = \mathbb{R}$
2. $\log_c$ er monoton, dvs. enten voksende eller aftagende i $\mathbb{R}_+$
3. For alle $a\,,\; b \in \mathbb{R}_+ :\; \log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$

- -

4. $\log_c(c) = 1$

Punkt 4. i definition 1, følger umiddelbart af punkt 1. og 2.
Da Vm(f) = R for en logaritmefunktion f, findes der specielt et tal c ∈ R+ , så f(c) = 1. Og da f er monoton, antages funktionsværdien 1 kun én gang, dvs. der findes kun ét tal med denne egenskab.

fig. 1



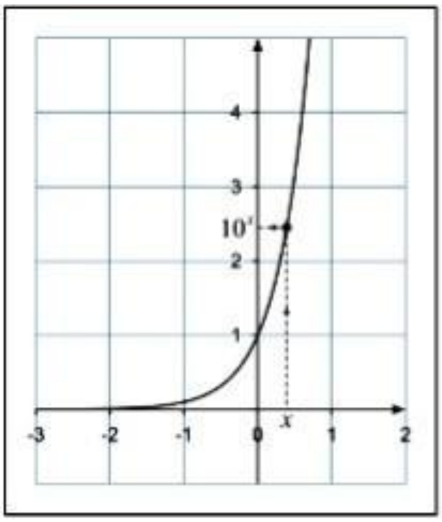
Ovenfor er graferne for logaritmefunktionerne $\log_{10}(x) = \log(x)$ og $\log_{e}(x) = \ln(x)$ afbildet.
Det ses, at $\log_{10}(10) = 1$ og $\log_{e}(e) = 1$, jævnfør definition 1.4.

Bemærkning 2

Der anvendes skrivemåden $\log(x)$ for $\log_{10}(10)$ og $\ln(x)$ for $\log_e(x)$.
Så disse betegnelser vil vi bruge fremover.

Lad os nu se, hvordan vi kan relatere logaritmefunktionen til eksponentialfunktionen .

Vi ser på grafen for eksponentialfunktionen $f(x) = 10^x$



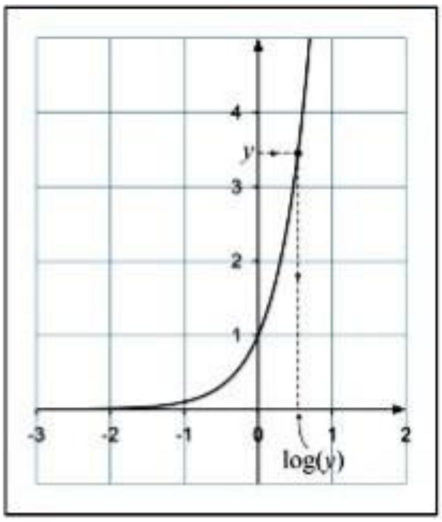


fig. 2 a *fig. 2 b*

På fig. 2a er afbildet grafen for eksponentialfunktionen $f(x) = 10^x$. Hvis vi fra et givet x på x-aksen går lodret op til grafen og herfra vandret ud til y-aksen, finder vi altså 10^x.

Men hvis vi om vendt kender en y-værdi på y-aksen, kan vi så finde en x-værdi, som afbildes i y? Svaret er ja, hvis $y > 0$. Og x-værdien er endda *entydigt* bestemt, eftersom f er en *voksende* funktion. Denne værdi for x vil vi betegne $\log(y)$, som vist på fig. 2b. Dette giver netop anledning til den ovenfor definerede logaritmefunktion $\log_{10}(x)$.

eks. 3 Hvis $x = 0,40$ på *fig. 2a* er $10^x = 2,51$. Hvis tilsvarende $y = 3,50$ på *fig.2 b* er $\log(y) = 0,54$.

Logaritmefunktionen $\log(x)$ er altså karakteriseret ved at være den *inverse* funktion til $f(x) = 10^x$. Du kan læse om inverse funktioner i artiklen inverse funktioner

eks. 4
I den artikel vises også sammensætning af funktioner:
Hvis to funktioner er hinandens inverse og man sammensætter dem, får man den identiske afbildning. I dette tilfælde med $f(x) = 10^x$ og $g(x) = \log(x)$ får man: $f(g(x)) = 10^{\log(x)} = x$ og omvendt $g(f(x)) = \log(10^x) = x$.

Det kan være vældig nyttigt ved udregninger, løsning af ligninger mv.

Eksponentialfunktionen 10^x og den inverse funktion, logaritmefunktionen $\log(x)$ er afbildet i fig. 3. Her er foretaget variabelskifte $x \leftrightarrow$ y,
så $log(x)$ afbildes på sædvanlig måde med x som den uafhængige variabel.
Det gøres ved at spejle 10^x i den rette linje y = x

$f(x) = 10^x$ og $f^{-1}(x) = \log(x)$

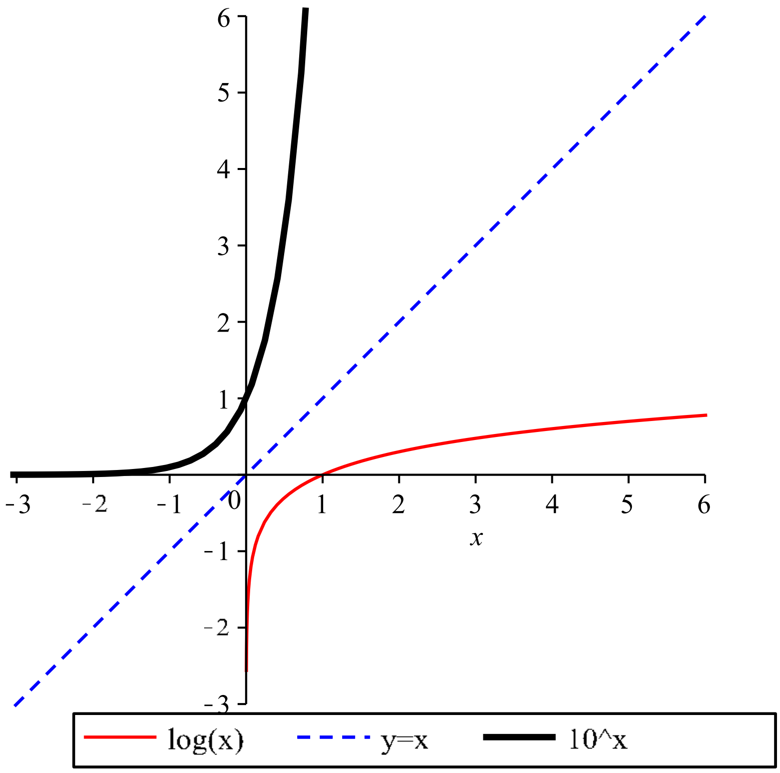


fig. 3

Sætning 5

1) Hvis f er en logaritmefunktion og k er en given konstant $(k \neq 0)$, så er funktionen $k \cdot f$ også en logaritmefunktion.

2) Hvis f og g er to givne logaritmefunktioner, så findes der en konstant k, så $g(x) = k \cdot f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}_+$

Vi bemærker altså, at der findes uendeligt mange logaritmefunktioner, men at de "ligner hinanden" idet forskellen på dem er en konstant.

eks. 6
f.eks. kan en logaritmefunktion med grundtal c, skrives som

$$\log_c(x) = k \cdot \log(x) = \frac{1}{\log(c)} \cdot \log(x) = \frac{\log(x)}{\log(c)} \qquad \text{og}$$

$$\log_c(x) = k \cdot \ln(x) = \frac{1}{\ln(c)} \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(c)}$$

Det ses, at begge skrivemåder for $\log_c(x)$ opfylder ***Definition* 1**, for en logaritmefunktion.

Et **konkret eksempel** på ovenstående skrivemåde, dannelse af funktion med grundtallet 2:

$$\log_2(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \quad .$$

Og værdien af $\log_2(x)$ for $x = 3$ er : $\log_2(3) = \dfrac{\log(3)}{\log(2)} = \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1,58496$.

Men nu vil vi koncentrere os om de to logaritmefunktioner *log(x)* og *ln(x)* resten af denne note.

Bemærkning: Ligesom *log(x)* bestemmes som den inverse funktion til eksponentialfunktionen 10^x, bestemmes $ln(x)$ som den inverse funktion til eksponentialfunktionen e^x.

Bemærkning 7
Vi kan altså karakterisere de to logaritmefunktioner *log(x)* og *ln(x)* således:

Ved funktionen $\log(x)$ forstås den inverse funktion til 10^x
Ved funktionen $\ln(x)$ forstås den inverse funktion til e^x

Nedenfor er sammenfattet nogle regneregler for logaritmer, som er meget anvendte i udregninger. Vi vil se på udregninger, løsning af ligninger, hvor vi anvender disse regler.

***Sætning* 8**

Der gælder følgende regneregler for en vilkårlig logaritmefunktion $\log_c$

1. $\log_c(1) = 0$ og $\log_c(c) = 1$

- -

2. $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$ (en del af definitionen på en logaritmefunktion)

3. $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$, for alle $a, b \in \mathbb{R}_+$

4. $\log_c(a^n) = n \cdot \log_c(a)$, for alle $a \in \mathbb{R}_+$ *og alle* $n \in \mathbb{Z}$

5. $\log_c(\sqrt[n]{a}) = \dfrac{1}{n} \cdot \log_c(a)$, for alle $a \in \mathbb{R}_+$ *og alle* $n \in \mathbb{Z}$

Lad os gøre rede for et par af ovenstående punkter i **Sætning 8**

$\log_c(1) = 0$ under punkt 1

$\log_c(1) = \log_c(1 \cdot 1) = \log_c(1) + \log_c(1)$, hvor vi har brugt pkt 3 i Definition 1 (pkt 2 i Sætning 8 ovenfor). Ved at trække $\log_c(1)$ fra på begge sider fås: $\log_c(1) = 0$. □

3. $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$

$\log_c(a) = \log_c\left(\dfrac{a}{b} \cdot b\right) = \log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) + \log_c(b)$, her er pkt 2 i Sætning 8 brugt.

Ved at trække $\log_c(b)$ fra på begge sider af lighedstegnet fås pkt 3. □

Nu vil vi se på anvendelse af logaritme regnereglerne i udregninger, ligninger

Regenreglerne giver mulighed for at reducere udtryk med logaritmer:

eks. 9

regel 5
$\log(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \cdot \log(a)$

regel 2
$\log(3) + \log(7) = \log(7 \cdot 3) = \log(21)$

$regel\ 4$
$\log\left(x^5\right) = 5 \cdot \log(x)$

$regel\ 3$
$\log(2x) - \log(5-x) = \log\left(\frac{2x}{5-x}\right)$

$regel\ 4$
$3 \cdot \ln(2) = \ln\left(2^3\right) = \ln(8)$

Og regnereglerne kan bruges til at løse forskellige typer af ligninger, som indeholder den ubekendte i logaritme- og eksponentialfunktioner:

eks. 10

$e^x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(e^x\right) = \ln(5) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(5)\ . \qquad$ (**eks. 4** sammensætning af inverse funktioner.)

$tag\ \log\ på\ begge\ sider\ \&\ regel\ 4$
$7^x = 83 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(7^x\right) = \log(83) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \log(7) = \log(83) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\log(83)}{\log(7)} \approx 2,2708\ .$

$tag\ \log\ på\ begge\ sider\ \&\ regel\ 4$

$5^{3x-1} = 1012 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(5^{3x-1}\right) = \log(1012) \quad \Leftrightarrow \quad (3x-1) \cdot \log(5) = \log(1012) \quad \Leftrightarrow$

$3x - 1 = \frac{\log(1012)}{\log(5)} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 1 + \frac{\log(1012)}{\log(5)} \quad \Leftrightarrow$

$x = \frac{\left(1 + \frac{\log(1012)}{\log(5)}\right)}{3} = \frac{5,299441312\ldots}{3} \approx 1,76648\ .$