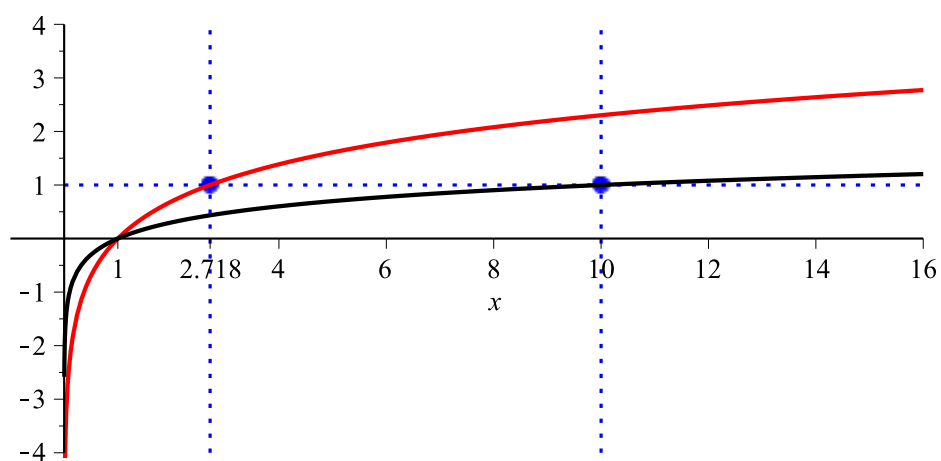


Logaritme funktioner 1

John V Petersen



Logaritme funktioner 1

© 2017 John V Petersen

[art-science-soul](#)

Indhold

Logaritmefunktioner, definition		4
Illustration af definitionen for logaritmefunktioner		5
eksempel 4: Inverse funktioner og sammensatte funktioner		5
Sætning 5: Uendeligt mange logaritmefunktioner		7
Karakterisere logaritmefunktioner		7
Regneregler for logaritmefunktioner		8
Anvendelse af regneregler - eksempel 9 og 10		8

Logaritme funktioner

$$f(x) = \log_c(x)$$

Definition 1

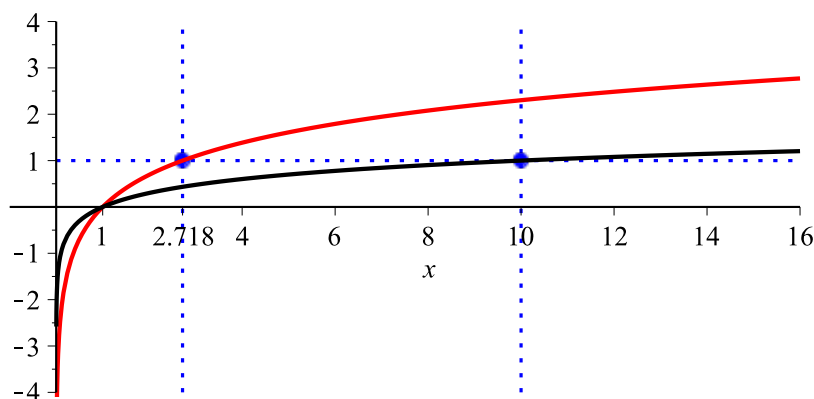
Hvis $\log_c(x)$ er en logaritmefunktion med grundtal c , så gælder der :

1. $Dm(\log_c) = \mathbb{R}_+$ og $Vm(\log_c) = \mathbb{R}$
2. $\log_c$ er monoton, dvs. enten voksende eller aftagende i $\mathbb{R}_+$
3. For alle $a, b \in \mathbb{R}_+ : \log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$
-
4. $\log_c(c) = 1$

Punkt 4. i definition 1, følger umiddelbart af punkt 1. og 2.

Da $Vm(f) = \mathbb{R}$ for en logaritmefunktion f , findes der specielt et tal $c \in \mathbb{R}_+$, så $f(c) = 1$. Og da f er monoton, antages funktionsværdien 1 kun én gang, dvs. der findes kun ét tal med denne egenskab.

fig. 1



— $\ln(x)$, $c = e \approx 2.718$ — $\log(x)$, $c=10$

Ovenfor er graferne for logaritmefunktionerne $\log_{10}(x) = \log(x)$ og $\log_e(x) = \ln(x)$ afbildet. Det ses, at $\log_{10}(10) = 1$ og $\log_e(e) = 1$, jævnfør definition 1.4.

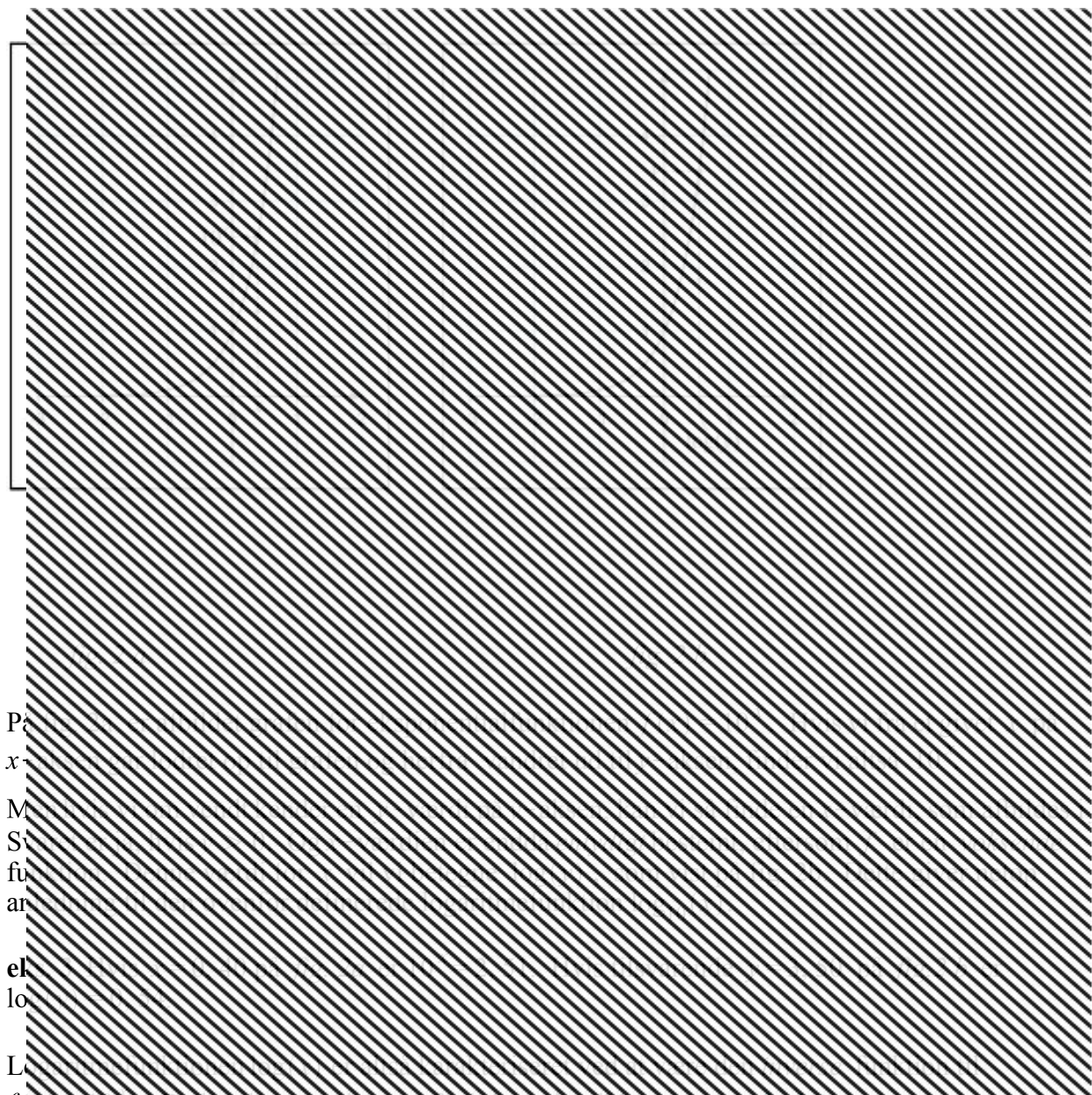
Bemærkning 2

Der anvendes skrivemåden $\log(x)$ for $\log_{10}(10)$ og $\ln(x)$ for $\log_e(x)$.

Så disse betegnelser vil vi bruge fremover.

Lad os nu se, hvordan vi kan relatere logaritmefunktionen til eksponentialfunktionen.

Vi ser på grafen for eksponentialfunktionen $f(x) = 10^x$



$f(x) = 10^x$. Du kan læse om inverse funktioner i artiklen [inverse funktioner](#)

eks. 4

I den artikel vises også sammensætning af funktioner:

Hvis to funktioner er hinandens inverse og man sammensætter dem, får man den identiske

afbildning. I dette tilfælde med $f(x) = 10^x$ og $g(x) = \log(x)$ får man: $f(g(x)) = 10^{\log(x)} = x$ og omvendt $g(f(x)) = \log(10^x) = x$.

Det kan være vældig nyttigt ved udregninger, løsning af ligninger mv.

Eksponentialfunktionen 10^x og den inverse funktion, logaritmefunktionen $\log(x)$ er afbildet i fig. 3. Her er foretaget variabelskifte $x \leftrightarrow y$, så $\log(x)$ afbildes på sædvanlig måde med x som den uafhængige variabel. Det gøres ved at spejle 10^x i den rette linje $y = x$

$$f(x) = 10^x \text{ og } f^{-1}(x) = \log(x)$$

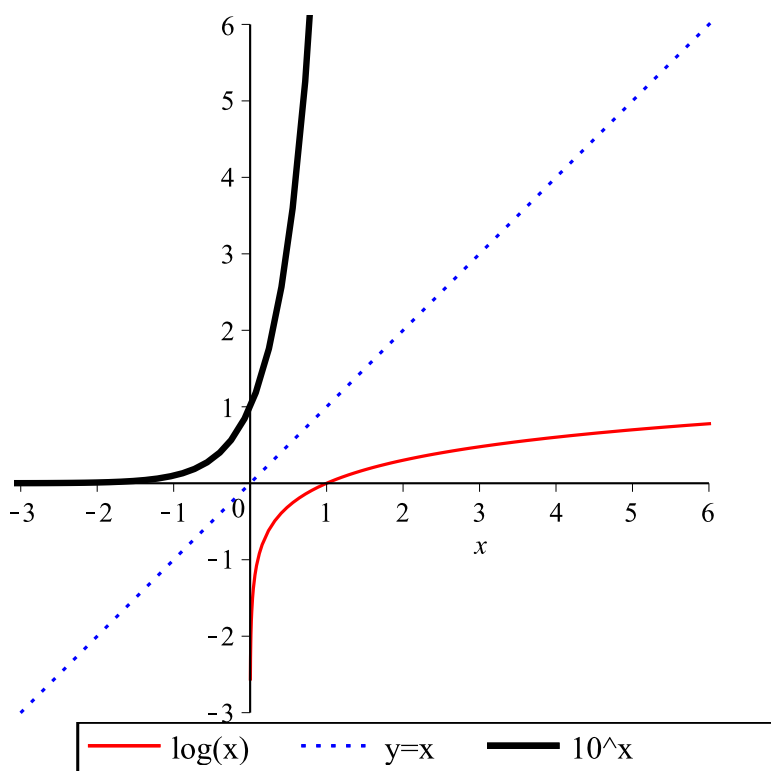


fig. 3

Sætning 5

- 1) Hvis f er en logaritmefunktion og k er en given konstant ($k \neq 0$), så er funktionen $k \cdot f$ også en logaritmefunktion.
- 2) Hvis f og g er to givne logaritmefunktioner, så findes der en konstant k , så $g(x) = k \cdot f(x)$

V
id

el
f.

lo

lo

D

E

lo

O

M

B

10

B

V

V

Ved funktionen $\ln(x)$ forstås den inverse funktion til e^x

Nedenfor er sammenfattet nogle regneregler for logaritmer, som er meget anvendte i udregninger. Vi vil se på udregninger, løsning af ligninger, hvor vi anvender disse regler.

Sætning 8

Der gælder følgende regneregler for en vilkårlig logaritmefunktion $\log_c$

1. $\log_c(1) = 0$ og $\log_c(c) = 1$

2. $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$ (en del af definitionen på en logaritmefunktion)

3. $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$, for alle $a, b \in \mathbb{R}_+$

4. $\log_c(a^n) = n \cdot \log_c(a)$, for alle $a \in \mathbb{R}_+$ og alle $n \in \mathbb{Z}$

5. $\log_c(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \cdot \log_c(a)$, for alle $a \in \mathbb{R}_+$ og alle $n \in \mathbb{Z}$

Lad os gøre rede for et par af ovenstående punkter i **Sætning 8**

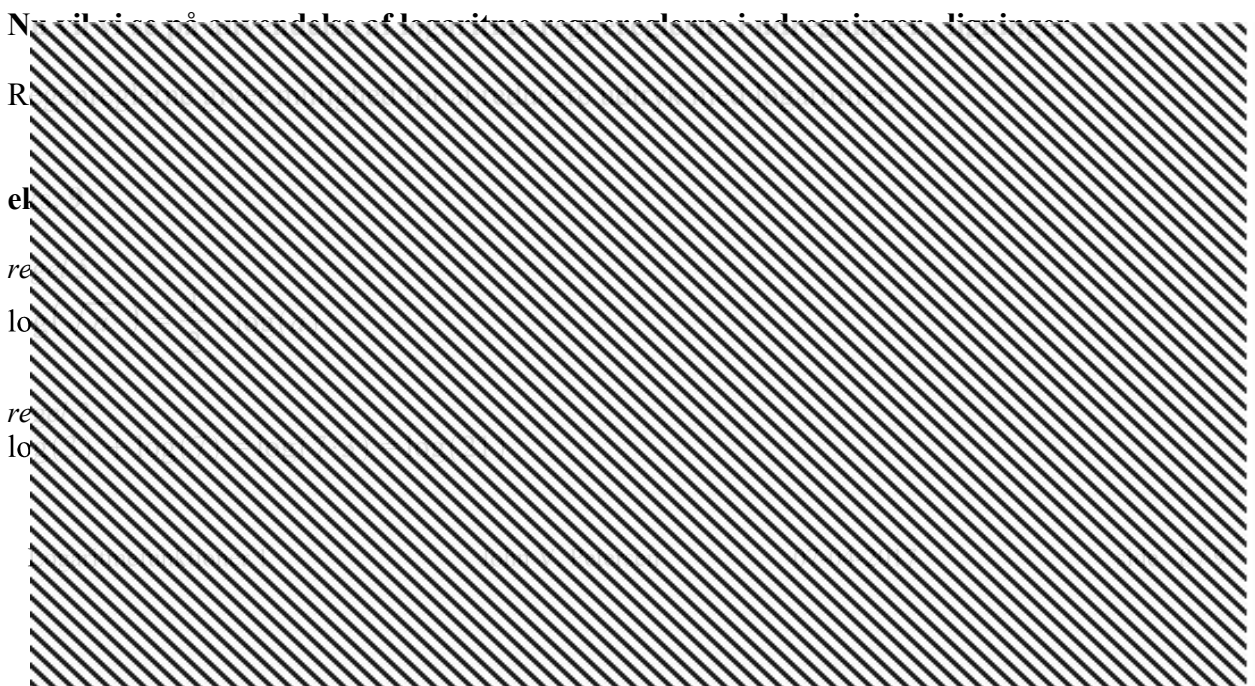
$\log_c(1) = 0$ under punkt 1

$\log_c(1) = \log_c(1 \cdot 1) = \log_c(1) + \log_c(1)$, hvor vi har brugt pkt 3 i Definition 1 (pkt 2 i Sætning 8 ovenfor). Ved at trække $\log_c(1)$ fra på begge sider fås: $\log_c(1) = 0$. $\square$

3. $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$

$\log_c(a) = \log_c\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = \log_c\left(\frac{a}{b}\right) + \log_c(b)$, her er pkt 2 i Sætning 8 brugt.

Ved at trække $\log_c(b)$ fra på begge sider af lighedstegnet fås pkt 3. $\square$



regel

$\log(x)$

regel

$\log(2)$

regel

$3 \cdot \ln($

Og re

logari

eks. 1

$e^x = 5$

tag lo

$7^x =$

tag log

5^{3x-1}

kendte i

ioner.)

$$3x - 1 = \frac{\log(1012)}{\log(5)} \Leftrightarrow 3x = 1 + \frac{\log(1012)}{\log(5)} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\left(1 + \frac{\log(1012)}{\log(5)}\right)}{3} = \frac{5,299441312...}{3} \approx 1,76648.$$