Biologisk model: Epidemi

af John V. Petersen

Eksempel på model der beskriver udviklingen for en epidemi. Den kan bruges til at finde en estimeret fordeling for raske, syge, døde og helbredte i en population. Det gøres udfra en startfordeling for disse grupper.

Til at løse problemet vil vi bruge matricer. Vi får igen brug for at diagonalisere en matrix. Desuden for vi brug for gentagne potensopløftninger af matricen. Og det er netop meget meget nemmere, når matricen er diagonaliseret.

I en population betragtes en epidemi af en smitsom sygdom. Populationen tænkes opdelt uge for uge i 4 grupper: raske, syge, døde og helbredte (og, antager vi, dermed immune).

Variable

- r_t : raske i uge t
- s_t : syge i uge t
- d_t : døde i uge t
- h_t : helbredte i uge t

Antagelser

- En rask har 20 % risiko for at blive syg efter en uge
- En syg har 10 % risiko for at dø efter en uge
- En syg har 20 % chance for at være helbredt efter en uge

Ligninger

$$r_{t+1} = 0.8\, r_t$$

$$s_{t+1} = 0.2\, r_t + 0.7\, s_t$$

(**Se forklaring i Appendiks A 1, si. 9**)

$$d_{t+1} = 0.1\, s_t + d_t$$

$$h_{t+1} = 0.2\, s_t + h_t$$

Ligninger på matrixform

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ s_{t+1} \\ d_{t+1} \\ h_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{bmatrix}$$

Kompakt notation

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t$$

Hvis $\boldsymbol{A}$ er diagonaliserbar, så ved vi, fra artikel **a.** ovenfor, at der findes en regulær matrix $\boldsymbol{P}$ så søjlerne i $\boldsymbol{P}$ netop er egenvektorerne hørende til egenværdierne for $\boldsymbol{A}$. Matricen $\boldsymbol{P}$ diagonaliserer $\boldsymbol{A}$, og $\boldsymbol{P}$ er netop basisskiftematricen hørende til basisskiftet fra den naturlige basis til basen bestående af egenvektorer for $\boldsymbol{A}$.

Vi finder først egenværdierne for matricen **A**, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *og* λ_4 samt de tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$.
Så kan vi diagonalisere $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}$

Vi lader $\boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{bmatrix}$, og betragter modellen

$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t$, hvor matricen $\boldsymbol{A}$ er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Modellen kan også skrives som $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}^t\,\boldsymbol{x}_0$

Vi skal nu bestemme egenværdier og egenvektorer for $\boldsymbol{A}$, og diagonalisere $\boldsymbol{A}$.
Det vil vi så bruge til at forudsige, hvad der sker i det lange løb i epidemimodellen.

Bestemmelse af egenværdier:

$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}$ [redacted]

Da $(\boldsymbol{A} - \lambda$ [redacted]

$det(\boldsymbol{A}$ [redacted]

og egenvæ [redacted]

$\lambda_1 = 0.$ [redacted]

Bestemme [redacted]

Vi vil finde [redacted]

Det gør vi [redacted]

$\boldsymbol{x} = (x_1,$ [redacted]

For $\lambda_1 = 0$ [redacted]

$$[\boldsymbol{A} - 0.8\,\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{5}{c}{\text{[redacted]}} \\ 0.2 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.2 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0 \end{array}\right.$$

0.0 [redacted]

0.0 [redacted]

I den [redacted]

I rækl [redacted]

Og i r [redacted]

Så eg [redacted]

Tilsva [redacted]

Egenv [redacted] 10)

$q_3 =$ [redacted]

De fir [redacted]

Vi har [redacted]

hvor [redacted]

Vi prøver lige om vi har regnet rigtigt:

Vi udfører matrixmultiplikationen $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.333\ldots & -0.666\ldots & 0.0 & 0.0 \\ 0.333\ldots & 0.333\ldots & 1.0 & 0.0 \\ 0.666\ldots & 0.666\ldots & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.333\ldots & -0.666\ldots & 0.0 & 0.0 \\ 0.333\ldots & 0.333\ldots & 1.0 & 0.0 \\ 0.666\ldots & 0.666\ldots & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.800000000000000044 & 0. & 0. & 0. \\ 0.200000000000000400 & 0.699999999999999845 & 0. & 0. \\ -1.11022302462515654\ 10^{-16} & 0.100000000000000061 & 1. & 0. \\ -2.22044604925031308\ 10^{-16} & 0.200000000000000122 & 0. & 1. \end{bmatrix} \approx$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

dvs. $\mathbf{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$ OK.

Vi vil nu se på, hvad der sker i det lange løb i vores epidemimodel:

Først vil jeg minde om følgende:

Sætning 1

$A^t = P\,\mathbf{D}^t P^{-1}$, for $t \geq 1$ **(1)** (**Se Bevis for sætning 1 i Appendiks A 3, si. 11**)

[redacted]

• x_0 er [redacted]

• Vi an [redacted]

Vi ha [redacted]

dvs. [redacted]

• D er [redacted]

$\mathbf{D}^t$ [redacted]

$\lim_{t \to \infty}$ [redacted]

Dvs. [redacted]

x_t = [redacted]

0 0 1 0

0 0 0 1

$$x_t \to \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.333\ldots & -0.666\ldots & 0.0 & 0.0 \\ 0.333\ldots & 0.333\ldots & 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} x_0$$

[redacted]

= 0. [redacted]

0. [redacted]

= 0. [redacted]

0. [redacted]

= 0. [redacted]

0. [redacted]

dvs. [redacted]

x_t = [redacted] ∞

$$\left[h_t \right] \quad \left[0.66666666666666630 \cdot r_0 + 0.66666666666666741 \cdot s_0 + 1.0 \cdot h_0 \right]$$

Resultatet fra forrige side:

r_t 0.0

x_t = [redacted] ∞

Eller: [redacted]

x_t = [redacted]

[redacted]

En [redacted]

Nu kan [redacted]

Hvis [redacted]

Dvs. [redacted]

så vil [redacted]

A. Appendiks

A 1. Ligninger si. 1, forklaring

Ligningerne for ugen $(t+1)$ er er opstillet, så vi går ud fra en tilfældig uge t, og ser hvilken fordeling af raske, syge, døde og heldredte der så er en uge efter.

Antagelser

- En rask har 20 % risiko for at blive syg efter en uge
- En syg har 10 % risiko for at dø efter en uge
- En syg har 20 % chance for at være helbredt efter en uge
  De helbredte, antager vi, er blevet immune.

Hvis vi starter i uge 0, er ligningerne ret simple:

$r_1 = 0.8\ r_0$: Ved start uge 0, er alle i populationen raske. Ingen er syge, døde eller helbredte set ift. epidemien.
Fra uge 0 til uge 1, er der 20 % som bliver syge $\rightarrow\ r_1 = 0.8\ r_0$

$s_1 = 0.2\ r_0$: Efter den første uge , er der kun sket det, at 20 % raske er blevet syge $\rightarrow\ s_1 = 0.2\ r_0$

$d_1 = 0$: Der er kun gået een uge fra start i uge 0. Alt der er sket, er at 20 % er blevet syge.
Der er ikke gået en uge, hvor en syg kunne risikere at dø $\rightarrow\ d_1 = 0$

$h_1 = 0$: Som ovenfor: Der er ikke gået en uge mere, så nogen syge kan være blevet helbredt $\rightarrow\ h_1 = 0$

Men lad os nu se på, en tilfældig uge $(t+1)$ med udgangspunkt i ugen tidligere, uge t :

$r_{t+1} = 0.8\ r_t$: Der er 20 % risiko for at blive syg efter en uge. Dvs. der er 20 % færre raske en uge efter $\rightarrow\ 0.8 \cdot r_t$

$s_{t+1} = 0.2\ r_t + 0.7\ s_t$: 20 % af de raske ugen før, er nu syge $\rightarrow\ 0.2\ r_t$
Ud af de, som var syge i uge t, er der 20 % som er helbredt, og 10 % som er døde $\rightarrow\ 0.7\ s_t$

$d_{t+1} = 0.1\ s_t + d_t$ De som var døde i uge t, er stadig døde $\rightarrow\ d_t$
Og der er 10 % af de syge i uge t, som er døde $\rightarrow\ 0.1\ s_t$

$h_{t+1} = 0.2\ s_t + h_t$ De som var helbredt i uge t, er immune, og derfor stadig helbredt $\rightarrow\ h_t$
Og der er 20 % af de syge i uge t, som ν er helbredt $\rightarrow\ 0.2\ s_t$

A 2. Egenvektorer q_3 og q_4

Egenvektorerne hørende til dobbeltroden $\lambda_3 = 1.0$

$[A - 1.$ [redacted]

Det ses, [redacted]

x_3 og x_4 [redacted]

Og q_1, [redacted]

Så vi ka [redacted]

Og vi væ [redacted]

Egenve [redacted]

Så $P =$ [redacted]

Da P er [redacted] $\neq 0$

$\Leftrightarrow$ at [redacted]

Så vi ha [redacted]

A 3. Bevis for Sætning 1, si. 6

Sætning 1

> Lad $\boldsymbol{A}$ være en n × n matrix. Hvis $\boldsymbol{A}$ er diagonaliserbar, kan den skrives som:
> $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$, hvor $\boldsymbol{P}$ er en regulær matrix , og D er en diagonalmatrix .
>
> Så gælder der, at $\boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^t\,\boldsymbol{P}^{-1}$, for $t \geq 1$, $t \in \mathbb{N}$.

Vi defin [redacted]

$p(1)$: [redacted]

$p(t+1)$ [redacted]

Bevis: [redacted]

Hvis [redacted]

- $p(1)$ [redacted]
- $p(t)$ [redacted]

så gæld [redacted]

Hvis vi k [redacted]
Så **antag** [redacted]
---------- [redacted]
Kan vi s [redacted]

- $p(1)$: [redacted]

- Nu **ant** [redacted]

Vi har gi [redacted]

$\boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^{t+1}$ [redacted]

$= \ (\boldsymbol{P}$ [redacted]

dvs. [redacted]

Vi konkluderer: $p(t)$ er sandt for alle $t \in \mathbb{N}$. ✓ ☐

$(\aleph) \quad [\,(\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{A}^t)\ (\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^t\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\,]$

A 4. Vise sammenhængen $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{x}_0$

Vi har fra tidligere (si. 2, øverst): $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t$. **(1)**

Nu starter vi med $\boldsymbol{x}_0$ og anvender matricen $\boldsymbol{A}$ på $\boldsymbol{x}_0$:

Hvis vi i **(1)** sætter $t = 0$, har vi:

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_2 = \left(A\,\boldsymbol{x}_1 \;=\; \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_0\right)$$

dvs.

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}_0$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{x}_0$$