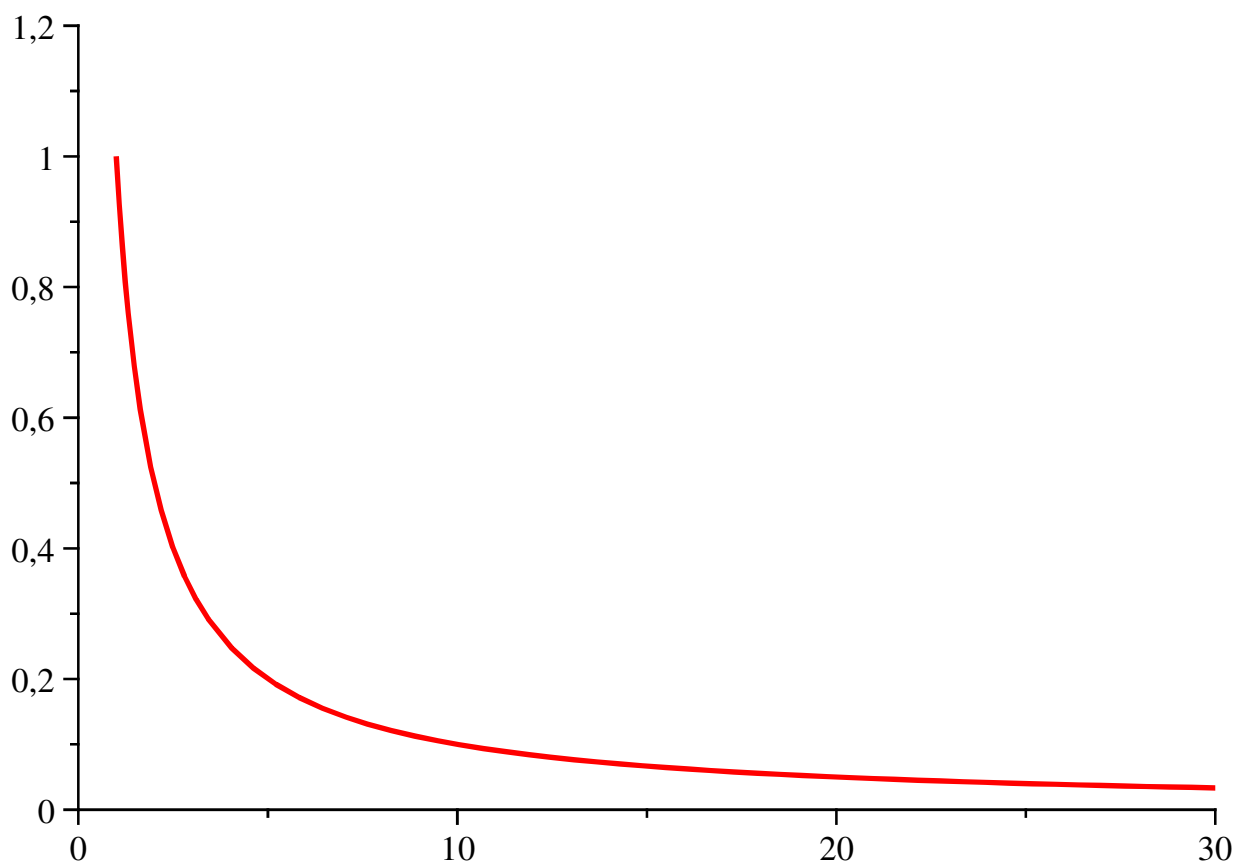


Erkendelse og Matematik

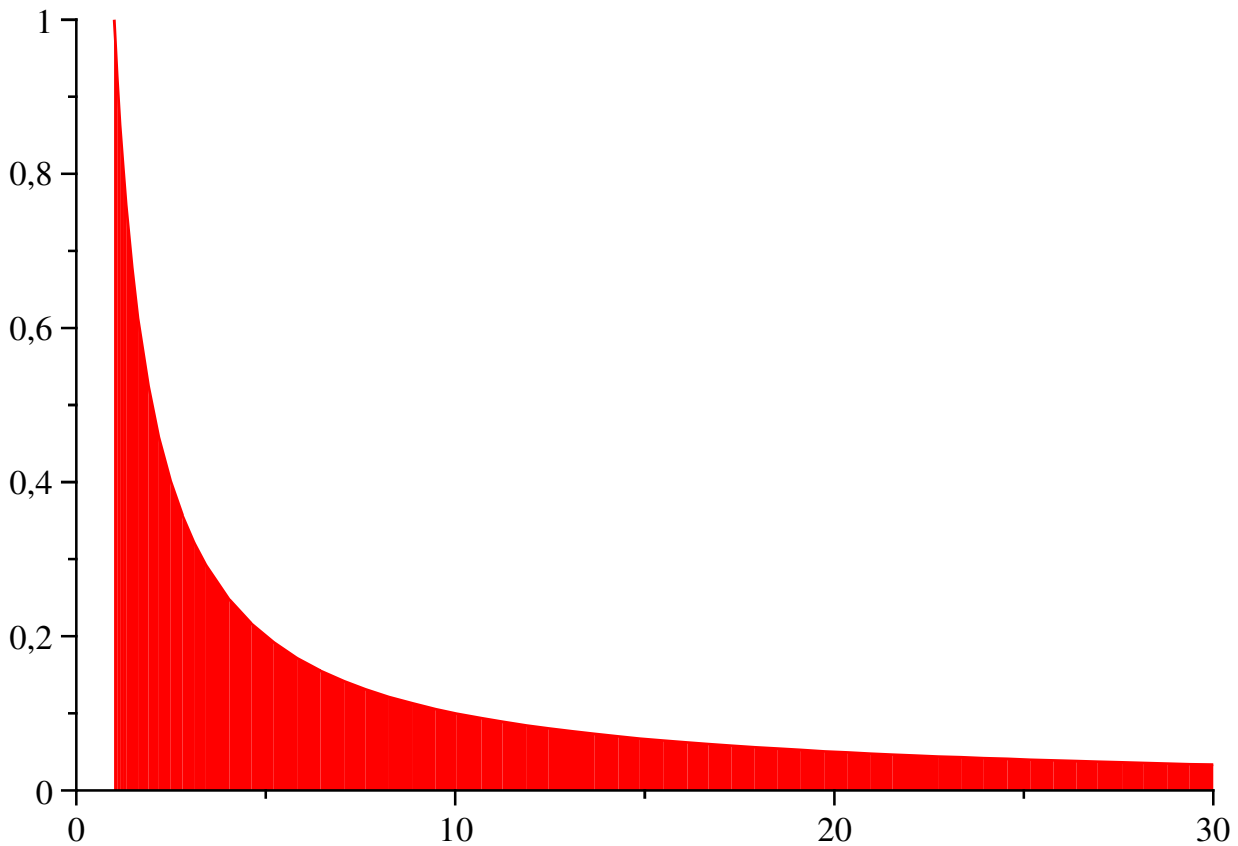
af *John V. Petersen*

Vi skal se på et lille men alligevel forundrende resultat. Den uendeligt store forskel mellem volumenet (rumfanget) af en rumlig figur og overfladearealet af den samme figur.

Vi ser først på funktionen $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1; \infty [$



Nu ser vi på arealet under grafen.



OBS: Her plotter vi kun op til $x = 30$. Vi skal forestille os, at x går mod uendelig, og "højden" af det røde område bliver mindre og mindre jo større x bliver.

Arealet findes ved at udregne det uegentlige integral:

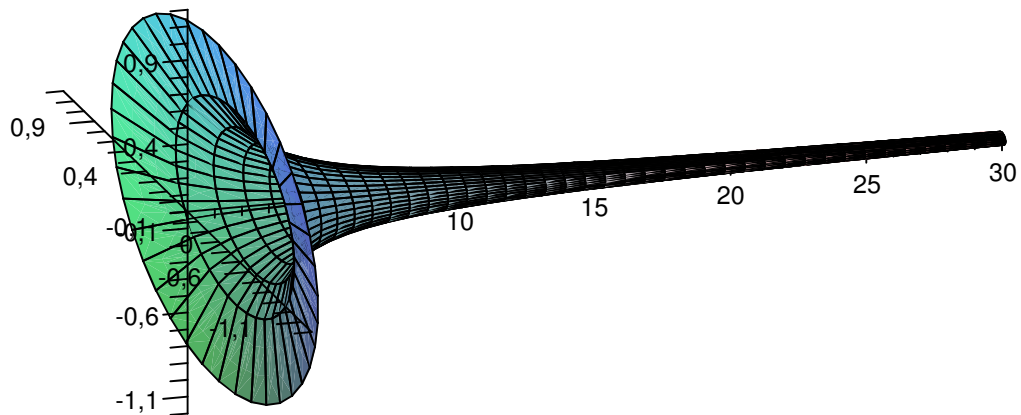
$$A = \int_1^{\infty} y(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty.$$

Arealet under grafen bliver uendeligt stort !

Hvis vi nu "drejer" grafen for $y = \frac{1}{x}$ 360° grader om x -aksen fremkommer et "omdrejningslegeme" med volumen

$$\text{Volumen} = \pi \cdot \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = ?$$

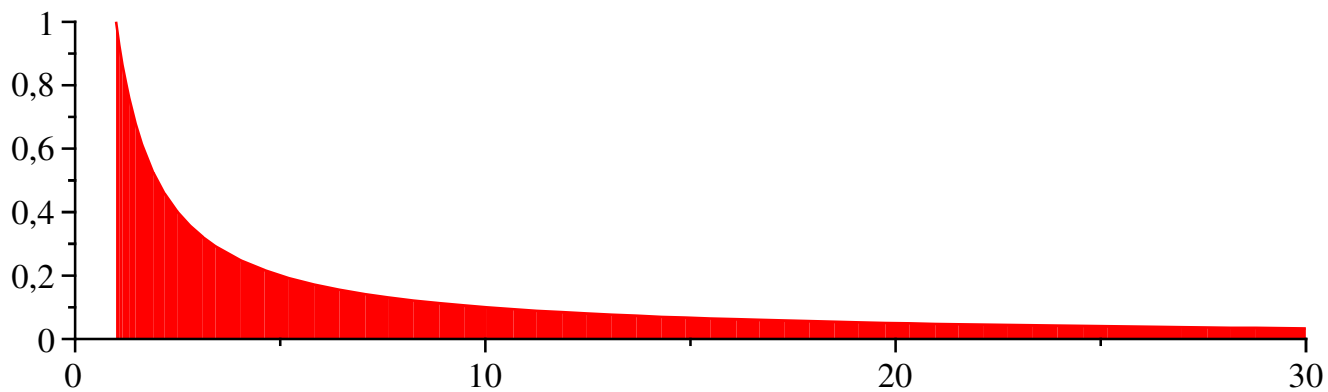
Vi afbilder "omdrejningslegemet" som også kaldes: Gabriel's Horn (eller Torricellis trumpet).

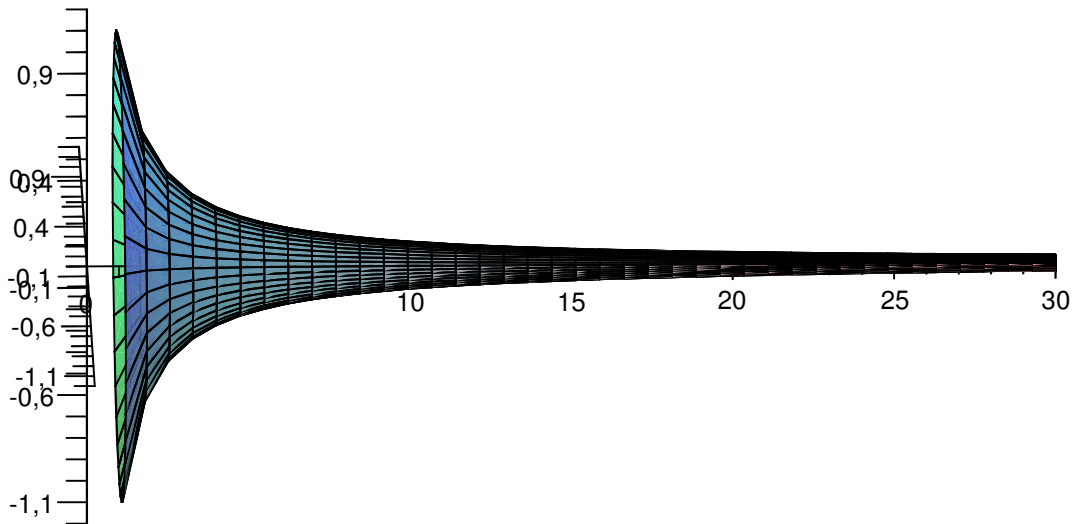


Vi udregner volumenet:

$$\text{dvs. Volumen} = \pi \cdot \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi$$

Dette volumen er endeligt $\pi \approx 3.14$, mens arealet under grafen ovenfor er ∞ (uendeligt.) ?





Med vor erkendelse, fornuft, logik kan vi ikke se på arealet og volumenet og afgøre, at arealet må være uendeligt meget større end volumenet.

Men trods alt. Det røde areal og volumenet af hornet ser så forskellige ud. Så det er nok derfor, vi ikke kan sammenligne dem ordentligt?

Men lad os så tage og sammenligne volumenet af hornet med overfladen af det samme horn. De er da så "uadskillelige", at der må være en tættere sammenhæng her?

Overfladearealet af hornet er:

$$\text{Overfladearealet} = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^{\infty} f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \infty$$

dvs. Volumenet af hornet = π , mens
overfladearealet af hornet = ∞

Det må være et meget skarpt eksempel på, at vi ikke kan erkende og slutte os til alting, blot ved vore tanker og fornuft.

Her tog matematikken over. Og her mener jeg, at vi ikke kan slutte os til om volumenet og overfladearealet begge har en endelig værdi, de begge er uendelige eller (som virkeligheden er her) den ene har en endelig værdi, mens den anden er uendelig.

Matematikken er selvfølgelig udviklet og deduceret ud fra vor erkendelse og tanker - men den overrasker os alligevel tit!