Knud Nissen

TI-89 Titanium Voyage 200

- introduktion og eksempler



Knud Nissen TI-89 Titanium / Voyage 200 — introduktion og eksempler

Copyright © 2000 by Texas Instruments 4. reviderede oplag 2005

Tryk: Jelling Bogtrykkeri

ISBN 87-91010-01-2

Publikationen er gratis og kan fås ved henvendelse hos

Texas Instruments Lyngby Hovedgade 4 2800 Lyngby Danmark

Tlf. 38 18 19 48 Fax 38 88 78 99 e-mail: ti-cares@ti.com http://education.ti.com/danmark

Udgivet at Texas Instruments Danmark

Skærmbillederne er lavet ved hjælp af det TI Connect[™] progam, der findes på den medfølgende CD. De specielle fonte TI89-Symbols og TI92pc, der er benyttet, kan downloades fra Texas Instruments hjemmeside.

Windows er et varemærke registreret af Microsoft Corporation,

Indhold

	Forord Før du går i gang	5 6
1.	Intro Oversigt Den første lille opgave Indtastning af et taludtryk Ryd op — F1[8]CLEAR Brøkregning — regning med eksakte tal Regning med bogstaver Om at sætte på fælles brøkstreg Catalog Ligninger og genbrug	. 7 7 8 9 .10 .11 .14 .15 .16
2.	Grafer og grafværktøjer Tegn graferne	19 19 21 22 24 25 25 26 27 28 29 30 31 31 31 32 33 34
3.	Variabler og formler Gem talværdier i variabler Oversigt — [VAR-LINK] Slet variabler Gem formler i variabler Midlertidig tildeling — With operatoren	35 36 37 37 37

En brugerdefineret funktion Lister	40 41
Ligninger og uligheder Trigonometriske ligninger	42 42
To ligninger med to ubekendte	43
Ligninger med parametre	44
Numerisk nulpunktsbestemmelse	44
Uligheder	45
Funktioner	46
Funktioner i hovedskærmen	46
Sammensat funktion	46
Asymptoter	47
Grænseværdier	48
Differentialregning	49
Matematiske modeller	50
SL-editor	50
Indtastning	51
Plot af data	51
Lineær regression	52
Gør klar til ny dataanalyse	55
Eksponentiel regression	55
Potens regression	59
Sandsynlighedsregning	61
Binomialfordelingen	61
Middelværdi og spredning	63
Normalfordelingen	64
Flash applikationer Sådan overføres operativsystemet mellem to	66
TI-89 Titanium eller to Voyage 200	67
Sådan overføres Flash applikationer mellem to	
TI-89 Titanium / Voyage 200	68
	En brugerdefineret funktion

De følgende kapitler kan downloades i pdf-format fra Texas Instruments hjemmeside http://education.ti.com/danmark under "Lærere" eller "Elever".

- 9. Differentialligninger
- 10. Vektorregning
- 11. 1-Variabel Statistik med boxplot
- 12. Finansapplikationen

Forord

Dette hæfte *TI-89 Titanium / Voyage 200 — introduktion og eksempler* er primært er beregnet til elever, der skal sætte sig ind i brugen af TI-89 Titanium / Voyage 200 til gymnasial matematik.

Hæftet dækker både TI-89 Titanium og Voyage 200, men alle skærmbilleder er fra TI-89 Titanium. Skærmen på en Voyage 200 er ca. dobbelt så stor, så alt det, der vises på en TI-89 Titanium skærm, vil også vises på Voyage 200 skærmen. Desuden er Voyage 200 udstyret med et fuldt tastatur, der gør indtastning af kommandoer meget bekvem, og gør, at der enkelte steder er en forskel i de tastetryk, der skal benyttes på det to maskiner. Hvor sådanne forskelle optræder, vil de to maskiner blive behandlet hver for sig.

I dette hæfte er det selvfølgelig kun muligt at omtale en meget lille del af de mange faciliteter, der er indbygget i TI-89 Titanium / Voyage 200. I hæftet løses en række typiske matematikopgaver, og hæftet rummer desuden nogle eksempler, der kun har til formål at forstå maskinens virkemåde — altså som en allerførste introduktion.

Jeg har valgt at benytte maskinen, som den er, uden det danske sprogmodul installeret. Installation af det danske sprogmodul sker ved at koble TI-89 Titanium / Voyage 200 sammen med en computer med det medfølgende kabel og den tilhørende software TI Connect. Sprogmodulet findes på den medfølgende CD, men kan også downloades gratis fra Texas Instruments webstore.

I afsnit 6 og 7 benyttes Flash applikation Stats/List Editor, der er præinstalleret på nye modeller. Stats/List Editor findes på den medfølgende CD, men kan også downloades gratis fra Texas Instruments webstore.

Til slut en stor tak til lektor Bjørn Felsager, Haslev Gymnasium, for mange konstruktive forslag til udarbejdelsen af dette hæfte samt for en kritisk gennemlæsning af manuskriptet.

Århus, november 2005 Knud Nissen

Før du går i gang...

Check operativsystemet

Med maskinen tændt taster du F1 og i den menu, der kommer frem, piler du ned på A:About og taster ENTER. Hvis versionsnummeret er mindre end 3.10, så bør du have et nyt operativsystem installeret (se p. 66).

Rens maskinen

Tast [MEM] (tastes som [2nd]6) og tast [F1] i den menu, der kommer frem.



Vælg 1:RAM ved at taste ENTER, 1:A11 RAM ved at taste ENTER nok engang og bekræft sletningen med ENTER for YES.

Opsæt Apps-skrivebordet (valgfri)

Tast MODE efterfulgt af F3. Pil ned til Apps Desktop og tryk på () for at åbne menuvalget. Tast [2] for at vælge 2:0N og ENTER for at gemme valget.

Du får Apps-skrivebordet frem ved at trykke på APPS.

F1 Menu	Home	16:33 17/07/03
de Graph	Home	f(×)=0 Numeric So
Frogram Ed	Stats/List E	Table 🗸
MAIN	RAD AUTO	FUNC

En blidere rensning får du med

TI-89 Titanium [F6] Voyage 200 F6

hvor 1:Clear az. sletter alle étbogstavs variabler. 2:NewProb sletter ydermere hoved- og grafskærmen. Graffunktioner og plots slettes ikke, men deaktiveres kun, så de ikke generer en ny aktivitet.

Med piletasterne kan du manøvrere på Apps-skrivebordet. Få applikationen Clock i fokus, tast <u>ENTER</u> og lav de nødvendige indstillinger, så du får den korrekte tid vist i øverste højre hjørne af Apps-skrivebordet.

1

Intro

For at få TI-89 Titanium / Voyage 200 til at lave noget fornuftigt så hurtigt som muligt, vil kun de absolut nødvendige dele af hovedskærmen og tastaturet blive omtalt her. I de følgende afsnit er der flere detaljer.

Du vil komme til at lave nogle elementære beregninger, der kun har til formål at give dig et første indtryk af de muligheder, TI-89 Titanium / Voyage 200 byder på. Du skal bruge TI-89 Titanium / Voyage 200 som en ganske almindelig lommeregner, lave nogle symbolske reduktioner, prøve menuerne og løse en ligning såvel symbolsk som numerisk.

Du vil lære at bruge tasterne til almindelig indtastning, redigering og navigation.



Hovedskærmen

Du kommer nemmest til hovedskærmen ved at taste

TI-89 Titanium	HOME		
Voyage 200	[HOME]	(Tastes som \bullet W)	

— eller vælge ikonen for **Home** på Apps-skrivebordet. Hovedskærmen består af fire dele: En menulinje, et historikområde, en indtastningslinje og en statuslinje.



Læg mærke til den blinkende markør i indtastningslinjen. Her sker al indtastning. Når indtastning er afsluttet med et tryk på ENTER-knappen, opstilles et indtastnings-/svarpar i historikområdet.

Tip

Hvis du taster forkert og kommer hen et sted, hvor du ikke bryder dig om at være, kan du ved at trykke på

TI-89 Titanium HOME Voyage 200 [HOME]

altid komme tilbage til hovedskærmen.

Den første lille opgave

Indtast **2+3** i indtastningslinjen og afslut med ENTER — du må ikke bruge -knappen som på en almindelig lommeregner. Resultatet er selvfølgelig ikke særlig interessant, men tag et kig på skærmbilledet:

Statuslinjen er også ændret en smule: Yderst til højre står der nu 1/30. Det betyder, at der er 1 indtastnings/svarpar i historikområdet ud af de 30, standardopsætningen giver plads til.



Indtastning af et taludtryk

Udregn udtrykket

$$-3.17 + \frac{2.53^2 - \sqrt{5.25}}{2.46}$$

Først skal du være opmærksom på det minus, der står foran 3.17. TI-89 Titanium / Voyage 200 skelner mellem et minus som fortegn ([-]) og som regnetegn ([-]).

Kvadratrodstegnet er det eneste, der ikke umiddelbart kan indtastes: Tegnet findes med blå skrift over \boxtimes -knappen. Det betyder, at du først skal trykke på den blå [2nd]-knap og dernæst på \boxtimes -knappen — dette skrives som [\checkmark].

Indtast følgende sekvens, hvis din skærm ser ud som ovenfor, vil indtastningslinjen blive slettet, så snart du taster [-]:

(-)3.17+(2.53^2-[√]5.25)))÷2.46

Skulle du lave en fejl undervejs, før du taster ENTER, kan du

- vha. tasterne 🕢 og 🕖 pile hen til den eller de fejl, du måtte have lavet
- slette et enkelt tegn ved at placere markøren efter det tegn, der skal slettes og taste
- indsætte et eller flere tegn på markørens position ved blot at skrive på det pågældende sted

Da du tastede $[\sqrt{}]$, svarede maskinen $\sqrt{}$ (. Det betyder, at maskinen forlanger, at det, der skal uddrages kvadratroden af, omgives af en parentes — også selvom det blot er et enkelt tal. Grafregneren sætter selv en unødvendig parentes om 2.53.

Tip Du kan hoppe fra den ene ende af indtastningslinjen til den anden ved at taste 2nd) eller 2nd) . Eksperimentér med disse muligheder. Billedet nedenfor viser skærmbilledet med udtrykket korrekt indtastet:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAl9ebraCalcOtherPr9mIOClean UP 2 + 3 5 .499425954 25))/2. 2-5(5. 17 Reb ellTD Mélk

Læg mærke til, at TI-89 Titanium / Voyage 200 viser det indtastede udtryk i historikområdet i overensstemmelse med almindelig matematisk skrivemåde — *pretty print* kaldes det.

Denne facilitet kan forhindre, at du laver fejl. Skulle du fx have glemt parentesen om tælleren, ville dit udtryk i historikområdet se sådan ud:



— og det ser jo galt ud, hvis du sammenligner med det udtryk, der skulle tastes ind. Gør det til en vane altid at sammenligne udtrykket i historikområdet med det, du skal indtaste.

Opdager du en fejl, efter at du har tastet ENTER, er det stadig muligt at redigere i udtrykket, der jo stadig står i indtastningslinjen. Så snart du taster ④ eller ④ forsvinder den sorte markering, og du kan redigere, så meget du vil.

Selvom det endnu er til at overse, kan du lige så godt lære at rydde op efter dig i historikområdet:

Indtastningslinjen kan slettes med <u>CLEAR</u>-knappen, hvis markøren er placeret efter alt det indtastede. Står markøren inde i det indtastede, slettes kun den del, der står til højre for markøren. To tryk på <u>CLEAR</u>-knappen vil således slette hele indtastningslinjen. Historikområdet sletter du ved først at taste F1, og i den menu, der kommer frem, vælger du 8:Clear Home på en af følgende måder:

- pil ned på 8:Clear Home med syv tryk på ⊙ og afslut med ENTER
- pil op på 8:Clear Home med tre tryk på 🔿 og afslut med ENTER
- tryk på 8 dvs. på 8 -knappen



Tastesekvensen F18CLEAR vil rydde historikområdet og indtastningslinjen.

Der er ingen fortrydknap. Har du først slettet historikområdet, er der ingen vej tilbage.

Brøkregning — regning med eksakte tal

Maskinen regner naturligvis eksakt med brøker af hele tal, hvor slutresultatet altid forkortes i bund.

Beregn udtrykket $\frac{7}{17} \cdot \left(\frac{5}{9} - \frac{3}{7}\right)$



På det første skærmbillede er indtastningen afsluttet med ENTER, og resultatet vises som uforkortelig brøk. Er du imidlertid ude efter en tilnærmet værdi, skal du afslutte indtastningen lidt anderledes:

Tegnet for tilnærmet værdi [\approx] findes med grøn skrift over [ENTER]-tasten. De grønne funktioner aktiveres ved først at trykke på den grønne ruder-knap \bullet . Du skal altså taste \bullet [ENTER] for [\approx]. På det andet skærmbillede ovenfor kan du se resultatet af dette.

Du skal være opmærksom på, at en eksakt beregning kun er mulig, hvis der udelukkende indgår eksakte tal i dit udtryk. Findes der blot et enkelt decimaltal i dit udtryk, vil du som resultat få et decimaltal. Prøv fx i ovenstående udtryk at erstatte 5-tallet med $5 \cdot 0$ og se, hvad der sker.

Det er ikke kun rationale tal, der behandles eksakt. Det samme gælder for irrationale tal, der så vidt det er muligt pr. automatik omskrives til et standardformat. Nedenfor ser du nogle eksempler på dette:

F1+ F2+ Tools A19ebr	raCalcOther P	F5 F6 r9ml0(Clear	, UP
■√12			2.13
■(1-2··	13) ² +(13	+ 3) ²	
		2 ∙ √	3 + 25
In(100)	2.1	n(10)
ln(100)			
MAIN	RAD AUTO	FUNC	3/30

Regning med bogstaver

Før du starter på dette afsnit, skal du sikre dig, at et-bogstavsvariablerne på din maskine er slettede.

Reducer udtrykket $2\sqrt{x^3} + (\sqrt{x} - x)^2$

Udtrykket indtastes således

 $2 [\mathbf{y}] X) \land 3 + ([\mathbf{y}] X) - X) \land 2$

Det eneste, du skal foretage dig for at få udtrykket reduceret, er at trykke på ENTER, idet maskinen pr. automatik vil søge at reducere udtrykket mest muligt:

Husk

Et-bogstavsvariabler slettes ved at taste

TI-89 Titanium[F6]Voyage 200F6

og vælge 1:Clear a-z.



TI-89 TitaniumBogstavet x sidder på en selvstændig tast. Det samme gør
bogstaverne y, z og t. Alle andre bogstaver skal skrives
vha. [alpha]-tasten.

Reducer udtrykket $\frac{a^3 - a \cdot b^2}{a + b}$

Du behøver blot at taste udtrykket ind - reduktionen sker igen automatisk:

$$\begin{array}{c} F_{1} & F_{2} & F_{3} & F_{4} & F_{5} & F_{6} \\ \hline Tools Algebra (calc Bther | Primit Clean UP) \\ \bullet & 2 \cdot (\sqrt{x})^{3} + (\sqrt{x} - x)^{2} & x \cdot (x + 1) \\ \bullet & \frac{a^{3} - a \cdot b^{2}}{a + b} & a \cdot (a - b) \\ \hline \hline (a^{3} - a*b^{2}) / (a + b) \\ \hline \hline MAIN & RAD AUTO & FUNC & 2/30 \end{array}$$

Når TI-89 Titanium / Voyage 200 altid reducerer et udtryk mest muligt, hvad gør du så, hvis du vil have udregnet fx $(a+b)^3$?

Indtast (a+b)^3 og tast ENTER. Der sker intet med udtrykket, men det er der råd for:

Flyt markøren til starten af indtastningslinjen, tryk på F2 og pil ned på 3:expand (

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsA19ebraCa1cOtherPr9miDClean Up	F1* F2* F3* F4* F5 F6* Tools Algebra Calc Other PrgmID Clean Up
$\bullet 2 \cdot (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x} - x)^2 x \cdot (x + 1)$	■ 2 · 2:factor(3:expand(3:expand(
■ <mark>a³-a·b²</mark> a·(a-b)	■ 4:zeros(■ 5:approx(6:comDenom(a·(a-b)
■(a+b) ³ (a+b) ³	■(a 8↓nSolve((a+b) ³
Ka+b)^3 Main radiauto func 3/30	(a+b)^3 Main rad auto func 3/30

Tast ENTER og "expand (" klistres på foran (a+b)^3. Flyt markøren hen til afslutningen af udtrykket og sæt en afslutningsparentes:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 ToolsAl9ebraCalcOtherPr9m	IDC1ean Up	F1+ F2+ F3+ ToolsAl9ebraCalc0	F4+ F5 F6+ therPr9mIDClean UP
$= 2 \cdot (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x} - x)^2$	$\times \cdot (\times + 1)$	$= 2 \cdot \left(\sqrt{x}\right)^3 + \left(\sqrt{x}\right)^3$	$(-\times)^2 \times (\times + 1)$
■ <u>a³-a·b²</u> a+b	a∙(a-b)	∎ <u>a³-a·b²</u> a+b	a∙(a−b)
■(a+b) ³	(a+b) ³	■(a+b) ³	(a+b) ³
expand(Ka+b)^3 MAIN RADAUTO F	UNC 3/30	expand((a+b) Main RaDau	^3) ITO FUNC 3/30

Tilbage er blot at taste ENTER for at få udtrykket ekspanderet:

F1+ F2+ ToolsA19ebra	F3+ F4+ CalcOther P	FS F6 r9ml0C1ea	4 4
• <u>a -a</u> . a+b	<u> </u>	a∙(a-b)
■(a+b) ³		(a	+b) ³
 expand((a+b) ³)		
a ³ +	3.a ² .b+	⊦3·a·b [:]	² +b ³
expand((a+b)^3)		
MAIN	RAD AUTO	FUNC	4/30

Du kan også skrive expand ((a+b)^3) direkte fra tastaturet uden at bruge Algebra- menuen, men det er ofte nemmere at bruge menuerne.

TI-89 Titanium Indtastningen foregår lettest således

[alpha]alpha]expand[alpha](([alpha]a+[alpha]b)^3)

De to tryk på alpha)-tasten før start bevirker, at maskinen sættes i "alpha-mode", så du ikke behøver at trykke på alpha)-tasten, hver gang du skal skrive et bogstav. Når **expand** er skrevet, ophæver du "alpha-mode" med et tryk på alpha)-tasten. Følg med i, hvad der sker i statuslinjen ved de gentagne tryk på alpha)-tasten.

Nogle af de mest benyttede kommandoer til beregninger findes i hovedskærmens menulinje (F2) og F3). Mange flere kan du finde ved at taste 2nd[5] for [MATH].

Alpha-mode kaldes også a-lock og kan altså også fremkaldes ved at taste [a-lock]. Her får du en liste af forskellige matematik menuer, som du kan bladre i med piletasterne. Fx finder du Algebra-menuen og Calc-menuen som nummer hhv. 9 og A i listen:

Du bladrer op og ned i listen med O og O. Du får vist en menu ved at taste O, og du vender tilbage til listen med O.



Orientér dig i menuerne og tast ESC for at vende tilbage til hovedskærmen.

Om at sætte på fælles brøkstreg

Du har tidligere set, sættes udtryk med talbrøker pr. automatik på fælles brøkstreg. Det samme gælder ikke summer og differenser af symbolske brøker. Hertil skal du bruge **ComDenom** fra Algebra-menuen (F2):

F1+ F2+ ToolsAlgebro	aCalcOtherP	F5 r9mi0(C1e	F6+ an Up
■ 1×3 + 7.	/19 - 3/7		<u>109</u> 399
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$			$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
• comDen	$om\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$)	<u>a+b</u> a∙b
comDenor	n(1∕a+1∕b)	
MAIN	RAD AUTO	FUNC	3/30

Ovenfor lod maskinen summen af de to brøker uændret, men dette er ikke altid tilfældet. Undertiden kan omformningerne se ret så underlige ud:



ComDenom er en forkortelse af Common Denominator, som betyder "fælles nævner". Men det er slet ikke så underligt endda. Der sker nemlig det samme, som når du omskriver en uægte brøk til et helt tal og en ægte brøk. Fx $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, hvor der med $2\frac{1}{3}$ egentlig menes $2 + \frac{1}{3}$. Sat på fælles brøkstreg, ser det sådan ud:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAl3ebraCalcalcherPr3mi0Clean UP
■ comDenom(<u>a+b</u> + <u>a-b</u>)
$\frac{2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2}{a^2 - b^2}$
(a+b)/(a-b)+(a-b)/(a+b)) MAIN RAD AUTO FUNC 1/30

Catalog

Der findes en kommando med navnet exact, der omsætter et decimaltal til brøk. exact findes ikke i hverken Algebra- eller Calc-menuen på hovedskærmen, så den må du finde andetsteds — eller selv skrive det.

Mest effektivt er det imidlertid at benytte den alfabetisk ordnede fortegnelse over alle instruktioner, som Catalog giver adgang til.

HeteFauitt-in/Pas HeteFauitt-in/Pas → abs(and AndPic angle(approx(Archive arcLen(EXPR	CATALOG S F4 S S S User-Defined	CATALOG FA Help Built-in File States of User-Defined FE e^(eigUc(eigUc(eigUc(Else ElseIf EndCustm rendDlog MAIN BARADAUTO FUNC 0/30	
TI-89 Titanium	[CATALOG] Maskinen er i alpha (÷)), vil indikatoren starter med e (det a	I-mode, så når du taster e (dvs. tryk på I stå i starten af de kommandoer, der Indet skærmbillede ovenfor).	
Voyage 200	[CATALOG] Tast e, så vil indikatoren stå i starten af de kommandoer, der starter med e (det andet skærmbillede ovenfor).		

Med ⊙ og ⊙ kan du pile op og ned i listen og med 2nd)⊙ og 2nd)⊙ kan du bladre en side ad gangen. To sider nede finder du exact. Flyt indikatoren (►) til exact:

Det er ikke sikkert, at dit skærmbillede ser ud som det første ovenfor, men det betyder intet. Indikatoren (►) vil altid stå der, hvor du sidst forlod Catalog. Hvis du har glemt syntaksen for fx en algebra-kommando, kan du altid få den oplyst i Catalog.

CATALOG F1 F2 :: 3 HelpBuilt-inf>:: 3: User-Defined	F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsA13ebraCa1cOtherPr9mIOClean UP
entry(⊁exact(Exec Exit	
expriist(expand(expr(A_ExpReg	exact(
K_EXPReg/	exact(EXPRETELS

Læg mærke til, at når indikatoren står ud for exact, får du syntaksen for kommandoen i statuslinjen: EXPR [, TOL]. Det betyder, at exact som argument dels skal have et udtryk og dels en valgfri tolerance, der skal adskilles med et komma. Tast ENTER, og exact (kopieres til indtastningslinjen sammen med hjælpeteksten, der som vist skrives i statuslinjen.

Nedenfor ser du et par eksempler på brugen af exact:

F1+ F2+ ToolsAl9ebro	F3+ F4+ aCa1cOtherP	F5 F r9mi0C1e	67 311 UP
<pre>exact(.</pre>	. 375)		3/8
• exact(.	333)		<u>333</u> 1000
<pre>exact(.</pre>	.333,.00)1)	1/3
•exact(.	.333,1.в	: -4)	333
exact(.3	33,.000	1)	
MAIN	RAD AUTO	FUNC	4/30

Ligninger og genbrug

Løs ligningen $x = \frac{1}{x-1}$

Tast F2 for at åbne Algebra-menuen. Menupunktet 1:solve (er allerede fremhævet, så du behøver blot at taste [ENTER], og solve (bliver skrevet i indtastningslinjen.

Herefter indtaster du ligningen x=1/(x-1) og fortæller, at ligningen skal løses med hensyn til x ved at skrive , x efter ligningen. Den færdige indtastning skal se således ud:

$$solve(x=1/(x-1),x)$$

Tast ENTER, og ligningen løses:

Fix F2* F3* F3* F4* F5
ToolsAlgebra Calc Other Pr3mill Clean UP
solve
$$\left(\times = \frac{1}{\times -1}, \times \right)$$

 $\times = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ or $\times = \frac{-(\sqrt{5} - 1)}{2}$
Solve (x=1/(x-1), x)
Main RAD AUTO FUNC 1/30

Hvis du kun er interesseret i fx den positive løsning, kan du begrænse løsningsintervallet til de positive reelle tal vha. *with-operatoren*.

TI-89 Titanium		
Voyage 200	[1]	(Tastes som 2nd k)

I skærmbilledet ovenfor taster du O. Så forsvinder den sorte markering i indtastningslinjen, og markøren står efter det allerede indtastede. Indsæt *withoperatoren* efterfulgt af $x > \emptyset$, så indtastningslinjen ser således ud:

Tast ENTER, og ligningen løses:



Laver du løsningsintervallet således, at der ingen løsninger er, svarer maskinen med false (det andet skærmbillede ovenfor)

Er du ikke interesseret i de eksakte løsninger, men blot nogle tilnærmede, klares sagen med tastetrykket \bullet [ENTER] for [\approx]:

Numerisk løsning af ligninger kan også udføres ved at skrive nSolve i stedet for solve. nSolve findes også i Algebra-menuen som nummer 8.

Læg mærke til den trekant (\blacktriangleright), der er i nederste højre hjørne af historikområdet. Det betyder, at svaret er for langt til at kunne stå inden for skærmbilledet. Vil du studere resultatet nøjere, skal du pile op i historikområdet med O. Herefter kan du pile frem og tilbage i svaret med O og O. Vil du hurtigt fra den ene ende af svaret til den anden, skal du taste $\boxed{2nd}$ eller $\boxed{2nd}$.



I historikområdet kan du pile op og ned i listen af indtastnings-/svarpar. Prøv! Uanset hvor du befinder dig i historikområdet, kan du komme tilbage i indtastningslinjen ved at taste ESC.

Taster du i stedet ENTER, vil det markerede kopieres til det sted i indtastningslinjen, hvor markøren stod, da du pilede op i historikområdet:

Redigér indtastningslinjen, så den ser ud som på det første skærmbillede nedenfor. Pil op i historikområdet til den positive løsning og tast ENTER. Tast ENTER nok en gang, og du vil få det sidste skærmbillede frem:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsA19ebraCalcOtherPr9mIOClean UP	F1+ SC+ C3+ CN+ F5 SC+ Tools SC+ PromiDicited Bi
• solve $\left(x = \frac{1}{x-1}, x \right) x > 2$	$\times = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$
false	• solve $\left(x = \frac{1}{x-1}, x \right) x > 2$
x = 1.61803398875 or x = 1	false
X=1/(X-1) Main rad auto func 4/30	$\frac{\times=1/(\times-1)}{\text{Main}}$
(F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAl9ebraCalcOtherPr9miOClean Up	F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsA19ebraCalcOtherPr9mIDClean UP
$\frac{F1+F2+F2+F3+F3+F4+F5}{T0015 A13ebra[Ca1c]Bther]Pr3mIB[C1ean UP]} \times = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\begin{bmatrix} F1 + F2 + F3 + F4 + F5 \\ Tools[Al3ebra[Calc] Other [Pr3mil] Clean UP] \\ false \\ \bullet solve \left(\times = \frac{1}{\times -1}, \times \right) \end{bmatrix}$
$ \frac{\left[F_{1}^{+}\right]F_{2}^{+}}{\left[F_{0}^{+}\right]F_{0}^{+}\right]F_{0}^{+}}\left[F_{1}^{+}\right]F_{1}^{+}\right]F_{1}^{+}$ $ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $ = \text{solve}\left[\times = \frac{1}{\times -1}, \times\right] \times > 2 $	$ \begin{array}{c} \hline f_{1} & F_{2}^{2} & F_{3}^{2} & F_{4}^{4} & F_{5}^{5} & F_{6}^{4} \\ \hline Tools an Bebra Calc Bther Primib Clean BP \\ \hline false \\ \bullet \text{ solve} \left(\times = \frac{1}{\times -1}, \times \right) \\ \times = 1.61803398875 \text{ or } \times = - \end{array} $
$\frac{\left[F1*\right]F2*}{Tools[al3ebra]Calc]Other]Pr3mID[Clean UP]} \times = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $solve\left[x = \frac{1}{x-1}, x\right] x > 2$ false	$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$

Grafer og grafværktøjer

I dette afsnit vil du lære at tegne grafer på din TI-89 Titanium / Voyage 200 og lære at anvende nogle af de værktøjer, der benyttes til at finde egenskaber ved de tegnede funktioner. Mere specifikt vil du lære at

- tegne grafer og indstille grafvinduet
- aflæse skæringspunkter med zoom og trace
- finde skæringspunkter med intersect
- bestemme funktionsværdier og lave et "sildeben"
- bestemme ekstremer for en funktion

I starten benyttes følgende eksempel:

Tegn grafen for den lineære funktion $f(x) = -\frac{3}{2}x+2$ og grafen for andengradspolynomiet $g(x) = x^2 - 6$. Bestem skæringspunkterne mellem linjen og parablen.

Tegn graferne



Vælg ikonen for Y= på Apps-skrivebordet eller tast

TI-89 Titanium	[Y=]	(Tastes som •F1)
Voyage 200	[Y=]	(Tastes som $\bullet W$)

og du får nu en editor til indtastning af forskrifter frem.



Indtastning af funktionerne sker på indtastningslinjen nederst på skærmen. Så snart du taster det første tegn i funktionsforskriften — i dette tilfælde fortegnsminus [--] — hopper markøren til indtastningslinjen, hvor resten af forskriften tastes ind, og der afsluttes med [ENTER].

F1 8 gør selvfølgelig også underværker! Sådan skal det se ud, når begge forskrifter er indtastede:

Fluebenet foran y1 og y2 betyder, at funktionerne er aktive, dvs. du kan få tegnet deres grafer, udregnet deres sildeben osv. Fluebenet sættes eller slettes med [F4].

F1+ F2+ Tools Zoom	3758		
+PLOTS ✓91=13.	/2·x+2		
√y2=x ²	- 6		
ý4= 45=			
 7=			
	:^2-6		
MAIN	RAD AUTO	FUNC	

Inden du kan tegne graferne, skal du fastlægge et *vindue* — dvs. fastlægge, hvilket udsnit af graferne du vil have tegnet. Til den ende findes en række prædefinerede vinduer. Dem kan du få fat på ved at vælge menupunktet F2 (Zoom):

F1+ F2+ F3 F4 F5+ F6+ : Tools Zoom Edit / A11 Style:*	2 *
-PLOT 1: ZOOMBOX	
√y1 2:ZoomIn	1
Vu2 3:ZoomQut	
[김숙] 4 ZoomDec	
1 34 5 400mbgr	
951 5 400M2tg	
991 8.700mTnt	
<u>171 0420001100</u>	
y3(x)=	
TYPE OR USE ++++ CENTER3 OR C	ESCI

Vælg 6: ZoomStd enten ved at pile ned på 6-tallet med \odot og taste ENTER, eller du kan klare det hele i ét hug ved blot at taste 6. Og prompte tegnes graferne.



Hvis du forlader grafvinduet, kan du til enhver tid vende tilbage med

FI-89 Titanium	[GRAPH]	(Tastes som • F3)
Voyage 200	[GRAPH]	(Tastes som $\bullet R$)



— eller ved at vælge Graph ikonen i Apps-skrivebordet. I grafvinduet vil du få tegnet de funktioner, der er markeret med flueben i Y= Editoren, og de vil blive tegnet i det sidst fastlagte vindue.

Zoom & Trace

I grafmenuen:

skal du vælge menupunktet **Trace** ved at trykke på **F3**, hvorved du får dette skærmbillede frem:



Du kan flytte sigtekornet frem og tilbage på linjen vha. tasterne 0 og 0 og samtidig følge sigtekornets aktuelle koordinater på skærmen.

Med et tryk på O eller O kan du binde sigtekornet til parablen, og du kan nu flytte sigtekornet frem og tilbage på parablen vha. tasterne O og O. På tallet i skærmens øverste højre hjørne kan du altid se, hvilken funktion sigtekornet er bundet til.

Flyt markøren til skæringspunktet i 4. kvadrant, og prøv at aflæse punktets koordinater — det er ikke helt let at fange punktet. Med markøren i nærheden af punktet taster du F2 for at vælge menupunktet Zoom. Vælg 2:Zoom In. Herefter ser din skærm nogenlunde ud som på det første billede nedenfor (måske med nogle andre koordinater):



Skiftevis Trace og ZoomIn er i praksis alt for klodset til bestemmelse af skæringspunkter mellem to grafer og må frarådes. Brug i stedet intersection (se nedenfor). Det forlanges, at du placerer markøren der, hvor du ønsker centrum for dit zoom, dvs. dit nye vindue, men det har du jo allerede gjort, så du skal blot trykke [ENTER], og du får zoomet ind på skæringspunktet



Tryk på F3 (Trace), og prøv igen at bestemme skæringspunktet mellem de to grafer. Du kan evt. zoome et par gange mere. Vær ikke bange for at eksperimentere — du kan altid vende tilbage til udgangspunktet ved at taste F2 og vælge 6:ZoomStd.

Skæring mellem grafer — Intersection

Tast først F2 og vælg 6: ZoomStd, så graferne kommer til at se ud som før, du begyndte at zoome.

Vælg menupunktet Math i grafmenuen ved at taste F5. Dette bringer følgende menu frem:



I denne menu vælger du **5:intersection** (skæring). Du skal nu foretage en række valg:

Først skal du udpege de to kurver, du vil finde skæringen mellem. Maskinen foreslår selv y1 som den første kurve. Du accepterer ved at trykke [ENTER]. Som den anden kurve foreslår maskinen y2, som du accepterer ved at trykke [ENTER]:



Dernæst skal du fortælle, mellem hvilke x-grænser (Lower Bound og Upper Bound) skæringspunktet befinder sig. Dette gør du ved at flytte markøren vha. () og () hen i nærheden af skæringspunktet, således at markørens xkoordinat ligger til venstre for skæringspunktets x-koordinat



- og trykke ENTER]. Maskinen svarer ved at sætte et lille mærke (►) for oven, der viser placeringen af Lower Bound, og beder samtidig om Upper Bound.

Upper Bound fastlægges tilsvarende ved flytte markøren hen i nærheden af skæringspunktet, således at markørens x-koordinat ligger til højre for skæringspunktets x-koordinat (andet skærmbillede ovenfor), og trykke [ENTER].

Skæringspunktet står nu til aflæsning nederst på skærmen (det første skærmbillede nedenfor).

Helt tilsvarende bestemmes det andet skæringspunkt. Prøv! Du skulle gerne ende op med det andet skærmbillede nedenfor:



Tip:

Du kan indtaste grænserne direkte fra tastaturet, når du bliver spurgt om Lower Bound og Upper Bound. Indtast fx 1 og 3.

Skæringspunkterne symbolsk

Husk

Du returnerer til hovedskærmen ved at taste

TI-89 Titanium HOME Voyage 200 [HOME]

— eller ved at vælge ikonen for Home i Apps-skrivebordet Hvis du har indtastet de to funktioner som hhv. y1 og y2 i [Y=]-editoren, kan du bestemme skæringspunkterne symbolsk i hovedskærmen ved at indtaste linjen Solve(y1(x)=y2(x), x)



Dette giver dig de to skæringspunkters x-koordinater. De tilhørende y-koordinater kan du finde ved at indsætte x-koordinaterne i en af forskrifterne én ad gangen:

Skriv y1(x)| i indtastningslinjen og tryk \odot for at markere løsningerne i historikområdet (første skærmbillede). Hent løsningerne til indtastningslinjen med <u>ENTER</u> og flyt markøren hen mellem **4**-tallet og **or** (andet skærmbillede). Tast <u>CLEAR</u> for at slette alt til højre for markøren. <u>ENTER</u> vil nu beregne y-værdien (tredje skærmbillede).



På det sidste skærmbillede er y-koordinaten til det andet skæringspunkt bestemt. Dette sker helt tilsvarende — dog er du her nødt til at bruge ← til at slette med.

Ny opgave og flere grafværktøjer

Tegn grafen for funktionen $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- 1) Bestem funktionsværdierne p(3) og p(7).
- 2) Bestem funktionens nulpunkter og lokale ekstremer.

Start om nødvendigt med at rense [Y=]-editoren: Skulle der i forvejen stå nogle (gamle) funktioner i [Y=]-editoren, slettes de én efter én ved at flytte markøren til den aktuelle linje og taste CLEAR. Indtast funktionsudtrykket i **y1** og tegn grafen i standardvinduet (F2] og vælg **6:ZoomStd**):



Manuel indstilling af grafvinduet

Du kan få en pænere graf ved at indskrænke vinduet. Tryk

TI-89 Titanium	[WINDOW]	(Tastes som •F2)
Voyage 200	[WINDOW]	(Tastes som $\bullet E$)



— eller ved at vælge WindowsEditor ikonen i Apps-skrivebordet, og standardvinduets dimensioner kommer frem:

F1+ F2+ Tools Zoom			
xmin=10 xmax=10.	0.		
ymin=-10	9.		
yscl=1. area ai.			
MAIN	RAD AUTO	FUNC	

I standardvinduet tegnes grafen altså i intervallet bestemt ved Xmin og Xmax, dvs. i intervallet [-10,10] — eller rettere sagt, i den del af

intervallet [-10, 10], hvor de tilsvarende y-værdier falder inden for y-grænserne Ymin og Ymax, der også er -10 og 10 i standardvinduet.

Xscl og Yscl, der i standardvinduet begge er sat til 1, angiver aksemærkernes placering på hhv. x-aksen og y-aksen.

Ret Xmin, Xmax, Ymin og Ymax som vist på billedet nedenfor, og tryk på [GRAPH]. Så tegnes grafen i det nye vindue:



Funktionsværdier med Trace

Funktionsværdien i 3 kan dårligt aflæses på grafen (og i 7 slet ikke), men du kan jo altid forsøge dig med F3 Trace. I Trace-mode taster du blot 3, og fluks står markøren i det punkt på grafen, der har x-værdien 3. Funktionsværdien (**yc**) ses nederst på skærmen.

c'et i xc og yc står for coordinates. Det er tilføjet, for at du ikke uforvarende kommer til at ændre på betydningen af variablerne x og y. Du kan referere til xc og yc i hovedskærmen.



Prøv dernæst at indtaste 7 og se, hvad der sker. Hvad går galt?

ERROR
Window variables domain

Funktionsværdier med TABLE

TI-89 Titanium / Voyage 200 er udstyret med en facilitet, der gør, at det er meget simpelt at få lavet en tabel (et sildeben) over funktioner.

Tast

TI-89 Titanium	[TblSet]	(Tastes som •F4)
Voyage 200	[TblSet]	(Tastes som $\bullet T$)



— eller vælg ikonen for Table på Apps-skrivebordet og tast F2. Her skal du fortælle maskinen, hvor din tabel skal starte, og hvor store spring du ønsker. Fyld ud som vist nedenfor, dvs. lad tabellen starte i 1, og sæt springene (Δ tbl) til 0.5. Afslut indtastningen med [ENTER] som påkrævet.

Du skal taste ENTER to gange for at afslutte denne dialogboks: Det første ENTER bekræfter indtastningen, mens det andet ENTER gemmer og afslutter.

F17 F2 (13) (3) (3) (3) (3) TABLE SETUP]
tb1Start1.	1
∆tb1	
Graph <-> Table OFF >	
Independent AUTO+	
Enter=SAVE ESC=CANCEL	2
X=1.	_

Hvis du har valgt at benytte **Table** fra Apps-skrivebordet, får du straks den ønskede tabel. Har du derimod valgt [TblSet], skal du nu taste

TI-89 Titanium	[TABLE]	(Tastes som •F5))
Voyage 200	[TABLE]	(Tastes som \bullet Y)

og straks får du den ønskede tabel, hvor du umiddelbart kan aflæse, at funktionsværdien i 3 er 2, dvs. p(3) = 2.

F1+ F2 Tools Setur	C.S.	<u> </u>	i i i i
×	y1		
1.	0.		
1.5	-1.375		
2.	-2.		
2.5	-1.125		
3.	2.		
×=1.			
MAIN	RAD AUTI	O FUNI	C

Bladrer du ned i tabellen med \odot , vil du også kunne finde funktionsværdien i 7 (198).

Skal du finde en række funktionsværdier, der ikke falder så regelmæssigt, at det blot kan klares med at sætte Δtbl passende, har TABEL en mere dynamisk side.

I menulinjen kan du se, at der er en nem vej fra TABLE til TblSet via F2 (SetUp). Benyt denne genvej, pil ned til indstillingen af Independent, dvs. den uafhængige variabel x. Tast her ④ og vælg Ask (første skærmbillede)



ENTER bringer dig tilbage til TABLE, hvor der tilsyneladende intet er sket. Rens først tabellen ved at taste F1 og i Tools-menuen vælge 8:Clear Table. Herefter får du en tom tabel, hvor du kan indtaste x-værdier, og så snart du trykker på ENTER, beregnes funktionsværdien (andet skærmbillede).

Funktionsværdier på hovedskærmen

Skift til hovedskærmen.

Den beregning, maskinen skal udføre, kan kort formuleres som y1(3), idet vi har givet funktionen p navnet y1 ved at indtaste forskriften for p som den første i funktionslisten i [Y=]-editoren. Du kan overbevise dig om dette ved at skrive y1(x) i hovedskærmen:

F1+ F2+ ToolsAl9ebro	F3+ F4+ aCa1cOther	F5 F1 Pr9mI0C1ea	je n Up
		7	2
■y1(x)		×3 - 3.	×4 + 2
∎y1(3)			2
■ g1(7)			198
y1(7)			
MAIN	RAD AUTO	FUNC	3/30

og ikke y1 (x), giver maskinen fejlmeddelelsen "Argument error". Du skal altså altid huske at have argumentet med.

Skriver du blot y1

Det ville være mere elegant, hvis vi blot kunne skrive p(3) og p(7), da

funktionens navn er p. Men det er der råd for:

Du kan definere funktionen p direkte i hovedskærmen ved at skrive:

Herefter giver det mening at udregne $p(3) \circ gp(7)$:

F1+ F2+ ToolsAl9ebro	F3+ F4+ CalcOther	F5 Pr9mi0Ci	F6+ lean Up
7	2		
■× ³ – 3·3	×4 + 2 →	P(X)	Done
■ p(3)			2
■ p(7)			198
p(7)			
MAIN	RAD AUTO	FUNC	3/30

Denne metode er speciel nyttig, hvis du ikke skal bruge grafen for p til noget. Skulle du alligevel få brug for den, kan du blot skrive navnet p(x) ind i [Y=]-editoren — det er lige så godt som at skrive hele forskriften. Naturligvis får p så også navnet y1 (hvis den står som den første), men det er til at leve med.

Nulpunktsbestemmelse — Zero

Du skal nu bestemme det nulpunkt for p, der ligger i intervallet [-1,0]. Hvis du ikke allerede har grafen på din skærm, så tast [GRAPH].

I Math-menuen (F5) vælger du 2:zero, og maskinen afventer din indtastning af den nedre grænse for det søgte nulpunkt. Dette kan du gøre på to måder:

Enten kan du indtaste en værdi, der ligger til venstre for nulpunktet, fx -1, eller du kan flytte markøren (som er bundet til grafen) med ④ til et sted, hvor markørens x-koordinat ligger til venstre for nulpunktet. Dit valg afsluttes med [ENTER].

Tilsvarende vælges den højre grænse for nulpunktet. Tast ENTER, og maskinen vil prompte give dig det søgte nulpunkt:



At maskinen leverer $^{-1}$. E $^{-13}$ som y-koordinat til nulpunktet, og ikke 0, hænger sammen med maskinens begrænsede regnenøjagtighed. Maskinen kan ikke se forskel på 0 og 10^{-13} .

Nulpunktsbestemmelse symbolsk

Du kan naturligvis også foretage en symbolsk bestemmelse af det nulpunkt for p, der ligger i intervallet [-1,0]. Hertil skal du bruge kommandoen **zeros** fra hovedskærmens Algebra-menu.

Gå til hovedskærmen og tast F2]. Pil ned på **4 : Zeros** og tast ENTER]. Den færdige indtastningslinje skal se således ud:



$$Zeros(y1(x),x)|-1 < x < \emptyset$$

Hvis du vil finde alle nulpunkter dropper du blot betingelsen, som vist i det andet skærmbillede. Læg mærke til, at i begge tilfælde får du resultatet som *lister* — dvs. med krøllede parenteser omkring.

Minimum & Maximum

Du skal nu finde det lokale minimum, funktionen har i nærheden af 2. Metoden er i det væsentlige den samme som ved nulpunktsbestemmelse.

I Math-menuen (F5) vælger du 3:Minimum, og maskinen afventer din indtastning af Lower Bound og derefter Upper bound



En eksakt matematisk undersøgelse vil afsløre, at funktionens lokale minimum antages i 2 og ikke i 1.9999998. Denne lille fejl skal naturligvis igen tilskrives maskinens begrænsede regnenøjagtighed.

Helt tilsvarende virker **4:maximum** i **Math**-menuen. Benyt denne til at bestemme det lokale maksimum, funktionen har i nærheden af 0.

Minimum & Maximum symbolsk

Du kan lave en eksakt bestemmelse af minimum og maksimum i hovedskærmen. Hertil skal du benytte kommandoerne fMin og fMax, som du finder i Calc-menuen i hovedskærmen.

For at bestemme det minimum, der er i intervallet]1,3[, indtastes:



fMin(y1(x),x)|1<x<3

Standardindstillinger

TI-89 Titanium

Grafskæmens dimension er 159 pixler (158 pixelspring) på langs og 77 pixler i højden (76 pixelspring). Da pixlerne er kvadratiske, er det rette forhold

$$\frac{158}{76} = \frac{79}{39}$$

Voyage 200

Grafskæmens dimension er 239 pixler (238 pixelspring) på langs og 103 pixler i højden (102 pixelspring). Da pixlerne er kvadratiske, er det rette forhold

 $\frac{238}{102} = \frac{119}{51}$

ZoomDec

TI-89 Titanium Med 158 pixelspring på tværs må x-intervallet have længden 15.8 (=2·7.9). Når det rette forhold skal bevares, må y-intervallet have længden 7.6 (=2·3.8).

Voyage 200

Med 238 pixelspring på tværs må x-intervallet have længden 23.8 (=2·11.9). Når det rette forhold skal bevares, må y-intervallet have længden 10.2 (=2·5.1). Graftegning på TI-89 Titanium / Voyage 200 sker ved, at maskinen genererer en tabel over støttepunkter (sildeben), plotter tabellens punkter og forbinder punkterne med rette linjer. Hvis der er diskontinuitetspunkter mellem Xmin og Xmax, detekterer maskinen disse, og tegner grafen i overensstemmelse hermed (se side 48).

Hvis detektionen af diskontinuitetspunkter slås fra (tryk [F1] 9 i grafskærmen), får du mulighed for at styre antallet af plotpunkter med Xres, der er sat til 2 i alle standardindstillinger — dvs. der beregnes en funktionsværdi i hver anden pixel.

Du har allerede stiftet bekendtskab med standardindstillingen ZoomStd, der ofte er en god indstilling at starte med. Da skærmen ikke er kvadratisk, vil denne indstilling give et noget fortegnet billede. På det andet skærmbillede er tegnet graferne for de to funktioner y1=1/2x og y2=-2x. De to rette linjer skal stå vinkelret på hinanden, hvilket grafen ikke just tyder på.



Indstillingen **ZoomDec** retter indstillingerne til, så der tegnes i det rette forhold. Desuden udmærker indstillingen sig ved, at springene mellem de enkelte støttepunkter er 0.1, hvilket har givet anledning til navnet.



ZoomSqr er ikke en standardindstilling, men justerer den aktuelle indstilling, så billedet vises i det rette forhold. Ved justeringen udvides grafvinduet i lodret retning, hvis den er for lille — og i vandret retning, hvis den er for lille. Der justeres altså efter behov, men altid så grafvinduet udvides, og du derfor ikke taber dele af graftegningen ved justeringen. ZoomTrig

TI-89 Titanium Med 158 pixelspring på tværs, må x-intervallet have længden

 $\frac{\pi}{24} \cdot 158 = 20.68215116361 = 2 \cdot 10.3410758181$

Voyage 200 Med 238 pixelspring på tværs, må x-intervallet have længden

 $\frac{\pi}{24} \cdot 238 =$ 31.1541271481 = $2 \cdot 15.5770635741$ **ZoomT**rig er beregnet til at tegne trigonometriske funktioner. Her er springene mellem de enkelte pixels $\frac{1}{24}\pi$. Dette gør, at alle strategisk gode støttepunkter beregnes, fx $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \dots$.

Desuden er Xscl er sat til $\frac{\pi}{2}$. Du skal bruge denne indstilling, når du tegner trigonometriske funktioner. Nedenfor er sin(x) og cos(x) tegnet med ZoomTrig indstillingen:



Funktion givet ved en tuborg-forskrift

Tegn grafen for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{for } x \le 1 \\ -2x + 4 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

— og løs ligningen f(x) = 1.

Gå til [Y=]-editoren, slet om nødvendigt funktioner i funktionslisten og skriv følgende forskrift for **y1**

when $(x \le 1, x^2+2x-1, -2x+4)$



TI-89 Titanium when skrives nemmest vha. Catalog.

Grafen er tegnet med standardindstillingen ZoomDec, der centrerer begyndelsespunktet og tegner med spring på 0.1. Grafen vises i et korrekt forhold

Ligningen f(x) = 1 løses let vha. grafværktøjerne når linjen y2(x)=1 er indtegnet. Ligningen kan selvfølgelig også løses symbolsk:



Harmonisk svingning

Vandstanden i en bestemt havn, målt i meter, er en funktion af tiden, målt i timer. For et bestemt døgn er denne funktion givet ved

$$f(x) = 2.75 + 0.70\cos(0.503x) \quad 0 \le x \le 24$$

Tegn grafen for f.

Hvor stor er forskellen mellem vandstanden ved flod og ved ebbe?

Hvor lang tid går der fra flod til næste flod?

Tast funktionen ind i [Y=]-editoren og slet om nødvendigt gamle funktioner i funktionslisten. Nu skal vinduet indstilles, og det skal ske manuelt: x-intervallet giver umiddelbart Xmin=Ø og Xmax=24. Funktionen svinger om 2.75 med et udsving på 0.7 til begge sider. Sæt Ymin=1 og Ymax=4, så er der god plads til begge sider.



De stillede spørgsmål kan let besvares vha. grafværktøjet. Prøv! Som svar skulle du gerne få den dobbelte amplitude (1.4) og perioden (12.5), der i øvrigt kan bestemmes ud fra ligningen $0.503x = 2\pi$.

Variabler og formler

I arbejdet med TI-89 Titanium / Voyage 200 er det meget vigtigt at forstå, hvad variabler er, hvordan de håndteres samt at kende betydningen af definerede og ikke-definerede variabler.

I dette afsnit skal du arbejde med toppunktsformlen for en parabel

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

hvor *a*, *b* og *c* er koefficienterne i parablens ligning $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, og $d = b^2 - 4a \cdot c$ er diskriminanten.

Du lærer, hvordan toppunktsformlen gemmes hensigtsmæssigt i en variabel, og hvordan formlen benyttes til at beregne toppunktet for parablen med ligningen $y = x^2 + 2x - 1$.

Herunder vil du lære at

- gemme talværdier i variabler
- gemme formler i variabler
- benytte gemte formler
- foretage midlertidig tildeling af værdier til variabler
- slette variabler

Gem talværdier i variabler

I det konkrete eksempel, $y = x^2 + 2x - 1$, er a = 1, b = 2 og c = -1. På TI-89 Titanium / Voyage 200 kan du gemme talværdier i navngivne variabler:

Et 1-tal gemmes i variablen \mathbf{a} ved at taste: 1 (STO) \mathbf{a} og tilsvarende for de andre variabler.

Du kan også gemme værdien af et udtryk i en variabel, fx kan du gemme værdien af $b^2 - 4a \cdot c$ i en variabel med navnet *d*. Du skal blot taste

Du behøver ikke at taste [ENTER] efter hver tildeling, men du må gerne. Det bliver mere overskueligt, hvis tildelingerne adskilles af et kolon [:].

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAlgebraCalcOtherPrgMIDClean	UP I
∎1→a:2→b: –1→c	-1
∎b ² -4·a·c→d	8
b^2−4*a*c+d	
MAIN RAD AUTO FUNC	2/30

Det er vigtigt at skrive gangetegn mellem \mathbf{a} og \mathbf{c} i udtrykket $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{a} * \mathbf{c}$. Maskinen genkender ikke den underforståede multiplikation, man har for vane at benytte i almindelig matematisk skrivemåde. Udelader du gangetegnet, opfattes \mathbf{ac} som navnet på en variabel. Derimod behøver du ikke at skrive noget gangetegn mellem $\mathbf{4}$ og \mathbf{a} — her benyttes underforstået multiplikation. Alt dette hænger sammen med kravene til et variabelnavn:

Et variabelnavn skal starte med et bogstav og kan bestå af indtil 8 bogstaver og tal.

Du kan se, at det er en værdi, der er blevet gemt i variablen d, nemlig tallet 8. Det betyder, at selvom du ændrer værdierne af a, b og c, vil d forblive uændret.

Ændrer du de værdier, der er gemt i variablerne **a**, **b** og **c** til fx a = 2, b = 12 og c = 13, og checker **d**'s værdi, ser du, at denne er uændret fra den foregående beregning:

Gemmer du en ny værdi i en variabel, vil den gamle værdi blive slettet. Indholdet af en variabel kan ses ved blot at skrive variablens navn efterfulgt af ENTER.

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 ToolsAlgebraCalcOtherPrgmIDClean	up D
■1→a:2→b: -1→c	-1
∎b ² −4·a·c→d	8
■2→a:12→b:13→c	13
■ d	8
d	
MAIN RAD AUTO FUNC	4/30

Oversigt — [VAR-LINK]

Du kan nemt få et overblik over, hvilke variabler du har i sving vha. [VAR-LINK], der tastes som [2nd]-.

[VAR-LINK] giver dig en tabel over de definerede variabler og giver desuden adgang til en række værktøjer til almindelig vedligeholdelse af data, filer og mapper — næsten som med Windows Stifinderen på en computer. Hvis du ikke har renset maskinen, før du gik i gang med dette afsnit, kan der være flere variabler i sving på din maskine. Det skal du ikke bekymre dig om nu.

~~~~	VAR-LINK CATIJ
′F1+ F2 Mana9e View	F3+F4   F5+ F6   50 Link / A11 Contents   508889
MAIN	·
р СО	EXPR 55 EXPPR 55 EXPR 55 EXPR 5
MAIN	RAD AUTO FUNC

Du kan se, at fire variabler er i brug: **a**, **b**, **c** og **d** samt at de alle er af typen expr, dvs. udtryk, og fylder 5 bytes. Main er navnet på den mappe, maskinen er født med.

# Slet variabler

Du skal nu lave det hele en gang til, men i omvendt orden. Først skal du slette de værdier, a, b, c og d har fået tildelt. Du kan nemt klare sagen i [VAR-LINK]: Pil ned på a og tast [F4], hvorved a mærkes med et flueben. Gør tilsvarende med b, c og d.



Tast  $\leftarrow$  for at slette og (ENTER) for at bekræfte sletningen. Læg mærke til, at du får en sidste chance for at fortryde med (ESC).

# Gem formler i variabler

Nu er variablerne a, b og c udefinerede, og når du igen udfører tildelingen

er det udtrykket  $b^2 - 4a \cdot c$ , der gemmes i *d* og ikke blot værdien af udtrykket. Herefter vil d kun få en værdi, hvis du tildeler **a**, **b** og **c** værdier, og værdien af d vil ændres, hvis du ændrer værdien af **a**, **b** eller **c**:

Du kan klare sagen i hovedskærmen ved direkte at skrive:

DelVara,b,c,d

efterfulgt af ENTER.

Gider du ikke at skrive DelVar, kan du taste F4 og vælge 4:

F1+ F2+ ToolsAlgebro	F3+ F4+ CalcOther	F5 F6 Pr9mIDC1ear	τuρ 🗌
■ DelVar	a,b,c,	d	Done
■ b ² - 4 ·	a∙c→d	ь ² –	4∙a∙c
∎1÷a:	2→b :	-1 → c	-1
∎ d			8
∎2→a :	12→b :	: 13÷c	13
■ d			40
d			
MAIN	RAD AUTO	FUNC	6/30

En ulempe er naturligvis, at så snart du tildeler værdier til a, b og c, vil du ikke længere umiddelbart kunne se, hvilken formel der er gemt i d — det kan du kun, hvis a, b og c er udefinerede. Helt umuligt er det dog ikke:

Tast [VAR-LINK], pil ned på d og vælg F6 Contents ved at taste

FI-89 Titanium	[F6]	(Tastes som 2nd F1))
Voyage 200	F6	

Her vil du kunne se, hvilken formel der er gemt i d, men du kan ikke rette i formlen.



Tast ESC eller HOME for at komme tilbage til hovedskærmen.

# Midlertidig tildeling — With operatoren

Slet variablerne **a**, **b** og **c** med kommandoen **DelVar a**, **b**, **c**. Beder du nu om at få **d** udregnet, svarer maskinen ved at give dig formlen, der er gemt i **d** — se skærmbilledet nedenfor.

Du kan lave en midlertidig tildeling af værdier til variablerne i d og beregne værdien af d ved at skrive:

d|a=1 and b=2 and 
$$c=^{-1}$$

Efter denne midlertidige tildeling kan du let checke, at du stadig kan fremkalde formlen i d, samt at a, b og c er udefinerede.

#### Husk

Du indsætter *withoperatoren* ved at taste

TI-89 TitaniumVoyage 2002nd

#### TI-89 Titanium

and mellem a=1 og b=2 skrives lettest ved at taste (CATALOG) a. Herefter behøver du blot at taste  $\odot$  en enkelt gang og [ENTER], så indsættes and med mellemrum omkring.

F1+ F2+ Tools Algebro	F3+ F4+ CalcOtherP	F5 F6 r9ml0(Clear	it n Up
∎DelVar	a,b,c		Done
■ d		ь ² -	4·a·c
•d a=1	and b =	2 and	c = 🕩
			8
■ d		ь ² -	4·a·c
∎a			a
a			
MAIN	RAD AUTO	FUNC	5/30

For at lave en formel, der bestemmer toppunktets koordinater, behøver du nu blot at taste følgende:

De krøllede parenteser { og }, der indtastes som 2nd () og 2nd ), er vigtige at få med, men betydningen skal du ikke bekymre dig om nu.

Herefter skal du blot lave en midlertidig tildeling af værdier til variablerne i formlen **top** for at beregne toppunktets koordinater i et konkret eksempel:

$$\begin{array}{c|c} \hline F_{1}^{F_{1}} & \hline & F_{2}^{F_{2}} & \hline \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Prøv lige [VAR-LINK] nok engang:

/ / / /	
C VAR-LIN	NK (A11)
´F1+ `F2 `F3+`F4    Mana9eViewLink ∕ f	F5-7 F6 50 111 Contents 8 808 800
MAIN <del>.</del>	
d	EXPR 15
l top	LIST 31
<u> </u>	
USE	

Som forventet er der nu defineret to variabler: d og top. Som før er d en variabel af typen EXPR, mens top er af typen LIST. At top er af en anden type end d, hænger sammen med, at top er bygget op af to udtryk adskilt af et komma og omgivet af krøllede parenteser.

### En brugerdefineret funktion

Toppunktsformlen kan implementeres som en brugerdefineret funktion af 3 variabler. I hovedskærmen skriver du:

Herved defineres en funktion med navnet toppkt. For at bestemme toppunktet for parablen  $y = x^2 + 2x - 1$ , indtaster du toppkt(1,2,-1):



Du behøver ikke møjsommeligt at taste funktionsnavnet — Catalog kommer til undsætning. I Catalogs menulinje ses, at det via [F4] (User-Defined) er muligt at få vist en liste over brugerdefinerede funktioner:

Det er også muligt at få vejledning i brug af funktionen toppkt skrevet på statuslinjen, men dette kræver kendskab til programmering.

	CATALO	3	
Help Buil	2 t-in  20022.00.90  U	F4 ser-Defined	יו
▶top	⊳kt(	main	
k.			_)
MAIN	RAD AUTO	FUNC	2/30

Hvis du taster [ENTER] med indikatoren (•) ud for toppkt, vil toppkt( blive overført til indtastningslinjen — faktisk vil main\toppkt( blive overført, hvor main er navnet på den mappe, hvori funktionen toppkt er defineret.

Måske har du undret dig over, at funktionen toppkt ikke er defineret som

{⁻b/(2a),⁻d/(4a)} STO► toppkt(a,b,c)

når variablen d allerede er defineret til at indeholde formlen  $b^2-4a*c$ .

Men det vil ikke virke. Forklaringen herpå er, at **a**, **b** og **c** i definitionen af **toppkt** blot er pladsholdere og intet har at gøre med variablerne **a**, **b** og **c**, der indgår i definitionen af **d**.

Hvis du gerne vil implementere formlen, som den er, skal du eksplicit gøre opmærksom på, hvad d er. Det kan du gøre således:

```
{ b/(2a), d/(4a)}|d=b^2-4a*c STO> top(a,b,c)
```

- og så vil det virke.

# Lister

I ovenstående implementation af toppunktsformlen satte du krøllede parenteser om toppunktets koordinater — du lavede det, der kaldes en liste.

En liste er en samling af objekter (tal, udtryk, strenge), som ikke nøvendigvis er relaterede. Som mængder angives lister med krøllede parenteser og de enkelte elementer separeres af et komma, men til forskel fra mængder, kan en liste indeholde dubletter.

Lister kan indtastes manuelt eller være resultat af anvendelse af en operation, der returnerer en liste - fx zeros, som du stiftede bekendtskab med på side 30. Nedenfor er vist nogle eksempler på lister:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAl9ebraCalcOtherPr9mIOClean Up	F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAl9ebraCalcOtherPr9miOClean Up
■(a b c d)→lsti	• lst1[2] b
(7 8 11 17)→1st2 (7 8 11 17)→1st2	■1st1+1st2 (a+7 b+8 c+11 d+)
• (x x ² ) → 1st3 (x x ² )	• Ist2- (49 64 121 289)
(x, x^2)→1st3 Main rad auto func 3/30	ANN RAD AUTO FUNC 3/30

Brug ikke navnene list1, list2, ..., list6 som navne til dine lister. De kan være anvendt til andre formål mere herom i afsnit 6.

> På det andet skærmbillede er vist, hvordan du kan trække et specifikt element ud af en liste.

> Du kan regne på lister præcis som på skalarer herunder benytte alle standardfunktioner, selvom det naturligvis stiller visse krav til listens elementer.

> I afsnit 6 introduceres et fleksibelt værktøj til indtastning af og arbejdet med lister.

# 4 Ligninger og uligheder

Du har allerede set nogle eksempler på såvel symbolsk som numerisk ligningsløsning, men der er meget mere at se på i den forbindelse:

- trigonometriske ligninger
- to ligninger med to ubekendte
- ligninger med parametre
- numerisk nulpunktsbestemmelse
- uligheder

# Trigonometriske ligninger

Løs ligningen sin(x) = 0.65, hvor  $x \in [0, 2\pi]$ 

Start med at sikre dig, at din maskine regner i radianer. Hvis der står RAD i statuslinjen, er det OK. Står der derimod GRAD, skal du taste MODE, pile ned til Angle og ændre indstillingen til 1: RADIAN.

Indtast som vist på skærmbilledet nedenfor og afslut med ENTER:

F1+ F2+ F3+ F4+ ToolsAl9ebraCalcOthe	r F5 F6+ rPr9mIDC1ean Up
<pre>solve(sin(x): x = 2.0p1.m+</pre>	=.65,x) 2 4340092169N
solve(sin(x)=	.65,x) FUNC 1/30

Det ser lidt underligt ud, men det viser, hvordan TI-89 Titanium / Voyage 200 tackler en ligning med uendelig mange løsninger. @n1 står for en heltallig konstant. Det virker sikkert mere bekendt på formen

$$x = 2.434 + p2\pi \lor x = 0.708 + p2\pi, p \in Z$$

Løsningerne i intervallet  $[0, 2\pi]$  finder du så ved at sætte p = 0.

# e tastes som ◆STO▶. ≥ og ≤ tastes som ◆0 og ◆. hhv.

Læg mærke til, at  $\geq$ og  $\leq$  ligger på de samme taster som > og  $\leq$ .

#### Tip

Hvis du vil se, hvilke specialtegn •-tasten giver adgang til, skal du taste

TI-89 Titanium • EE Voyage 200 • k Det klarer du sådan: Hent løsningerne i historikområdet til indtast-ningslinjen og tilføj |@n1=Ø:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAl9ebraCalcOtherPr9mlOClean Up	F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ Too1sA19ebraCa1cOtherPr9mIOC1ean Up
<pre>solve(sin(x) = .65, x)</pre>	
× = 2·@n1·π + 2.4340082168) × = 2·@n1·π + 2.4340082168)	■ solve(sin(x) = .65, x)  0≤ >
	x = .707584436725 or x = 2) ve(sin(x)=0.65,x)10≤x≤2π MAIN RAD AUTO FUNC 1/30

På det andet skærmbillede er vist en mere fiks metode, hvor løsningsintervallet fra starten begrænses til  $[0,2\pi]$  ved at skrive

solve(sin(x)= $\emptyset.65$ ,x)| $\emptyset \le x \le 2\pi$ 

# To ligninger med to ubekendte

Løs ligningssystemet

 $x^{2} + 2x + y^{2} - 4y - 3 = 0 \land y = 4x$ 

Geometrisk svarer opgaven til at finde skæringspunkterne mellem en cirkel og en linje. Du indtaster således:

```
solve(x^2+2x+y^2-4y-3=\emptyset and y=4x, \{x,y\})
```

Læg mærke til, at der skal skrives **and** mellem ligningerne, og at de variabler, du løser med hensyn til, skal i krøllede parenteser:

F1+ F2+	- F3+ F4+	F5 F6	ζuρ
ToolsA19eb	raCa1cOther	Pr9mIDC1ear	
		-	
■ solvel	(x ² + 2·×	+y ² -4	·g-▶
x = 1 a	and y = 4	or x=	-3∕1▶
2-4y-3	6=0 and y	J=4×, {×,	y))
Main	RAD AUTO	FUNC	1/30

Igen fylder løsningen for meget til, at den kan vises, men du skal bare pile op i historikområdet, så kan du undersøge hele løsningen.

TI-89 Titanium and mellem de to lignínger skrives lettest ved at taste <u>CATALOG</u> a. Herefter behøver du blot at taste ⓒ en enkelt gang og <u>ENTER</u>, så indsættes and med

mellemrum omkring.

## Ligninger med parametre

Måske har det undret dig, at du altid skal skrive, hvilken eller hvilke variabler du vil løse ligningen med hensyn til. Det hænger sammen med, at TI-89 Titanium / Voyage 200 også kan håndtere ligninger med parametre:

Løs ligningssystemet

$$2x - y - 1 = 0 \land y = 3x^2 - ax - 1$$

Geometrisk svarer denne opgave til at finde skæringspunktet mellem en ret linje og en parabel. Indtast således (husk * mellem a og x)



Prøv også at løse den generelle andengradsligning — andet skærmbillede ovenfor.

# Numerisk nulpunktsbestemmelse

Løs ligningen  $x^2 - \sin(x) = 0$ 

Tast ligningen ind som vist. Maskinen er BUSY i lang tid, og her ser du for første gang maskinen ryste lidt på hånden — se statuslinjen:



Tip Du kan styre solve med et gæt på løsningen, fx solve ( x^2-sin(x)=Ø, x=Ø.8) Læg mærke til, at maskinen opgiver at regne symbolsk — klogt nok, for det kan ikke lade sig gøre. I den slags situationer er det klogt at bruge grafværktøjet for at se, om alle løsninger er fundet. På det andet skærmbillede ovenfor er grafen for funktionen  $f(x) = x^2 - \sin(x)$  tegnet i et passende vindue.

# Uligheder

Du kan også løse uligheder vha. **solve**-kommandoen:

Løs uligheden  $-\frac{1}{2}x^2 - 6x - 16 \le 2x + 14$ 

Uligheden indtastes præcis som en ligning — blot skal du anvende et ulighedstegn i stedet for et lighedstegn. Til højre ser du en grafisk illustration af løsningen.



Med TI-89 Titanium / Voyage 200 kan du løse langt mere komplicerede uligheder end andengradsuligheden ovenfor. Du kan fx løse en dobbeltulighed:

Løs uligheden  $1 < |x^2 - 2| < 6$  i intervallet ] 0,  $\infty$  [



Tip Specielle funktioner, herunder trigonometriske funktioner samt logaritme- og eksponentialfunktioner kan også indgå i ulighederne.

# Funktioner

Du har allerede set flere eksempler på, hvordan funktioner håndteres. Hovedsagelig har du foretaget indtastningen i [Y=]-editoren og refereret til funktionerne via det navn, **y1**, **y2**, osv. funktionen således får. I dette afsnit vil du lære at

- definere funktioner i hovedskærmen
- tegne grafen for en funktion fra hovedskærmen
- sammensætte funktioner
- beregne invers funktion
- udføre polynomiers division
- udregne differentialkvotienten

# Funktioner i hovedskærmen

I [Y=]-editoren *skal* du bruge x som uafhængig variabel. Definerer du en funktion i hovedskærmen, er der frit valg af navn til den uafhængige variabel. En definition af funktionen  $f(t) = t^2 - 4t + 3$  vil i hovedskærmen se således ud:

hvor  $\rightarrow$  laves med STO-knappen. Grafen tegnes fra hovedskærmen (i det aktuelle vindue) ved at skrive:

#### Graph f(t),t

hvor det sidste t betyder, at t er den uafhængige variabel.

## Sammensat funktion

To funktioner  $f \circ g g$  er bestemt ved

$$f(t) = t^2 - 4t + 3$$
 og  $g(t) = \sqrt{t - 2}$ 

Bestem  $g \circ f(t)$  og  $f \circ g(t)$ .

F1+ F2+ ToolsAlgebro	F3+ F4+ CalcOther	FS FI Pr9mI0C1ea	ŝτ n UP
■t ² -4··	t+3→f(	(t)	Done
■√t - 2 →	g(t)		Done
■ g(f(t))		.t ² - 4	•t+1
■ f(g(t))	-4	.√t - 2.	+t+1
f(g(t)) MAIN	RAD AUTO	FUNC	4/30

Find den omvendte funktion til  $f(x) = \sqrt{x+2} - 3, x \ge -2$ 

Opgaven er at løse ligningen f(x) = t med hensyn til x:

Denne metode kan kun anvendes, hvis der findes et analytisk udtryk for den omvendte funktion.

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAl9ebraCalcOtherPr9mIOClean UP	F1+ F2+ F3 F4 F5+ F6+ F7+5!! ToolsZoomTraceRe9raphMathDrawPen!:
■ √x + 2 - 3 → f(x) Done	9/1
• solve( $f(x) = t, x$ )	1 71/
x=t ² +6·t+7 and t≥ -3	
■x ² +6·x+7 x≥-3→g(x)	
Done	
x^2+6*x+71x≥-3+g(x)	
MAIN RADIAUTO FUNC 3/30	MAIN RAD AUTO FUNC

På det andet skærmbillede er grafen for f og g tegnet i samme koordinatsystem sammen med linjen med ligningen y = x.

Hvis du i grafskærmens menulinje vælger **Draw**, kan du få tegnet grafen for den inverse funktion ved at vælge **3:DrawInv**. Her skal du blot være opmærksom på, at det er en ret bevidstløs rutine, der blot bytter om på x og ykoordinaterne uanset om funktionen er injektiv eller ej.

# Asymptoter

Find asymptoterne for funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 2}$$

Diskontinuitets detektion kan slås til/ fra i Graph Formats menuen, der fås frem ved at taste [F1 9 i grafvinduet.

Definer først funktionen i hovedskærmen og tegn grafen. Læg mærke til, at maskinen har opdaget en diskontinuitet i x = -2. Af grafen ses, at linjen med ligningen x = -2 er lodret asymptote.

Den skrå asymptote findes ved at bruge kommandoen propFrac:

propFrac er en forkortelse af proper Fraction, som betyder "ægte brøk". Kommandoen spalter altså en uægte polynomiumsbrøk (hvor nævnerens grad ikke er den største) i et polynomium og en ægte polynomiumsbrøk (hvor nævnerens grad er den største).



### Grænseværdier

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2 + x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Undersøg, om f har en grænseværdi for x gående mod 0.

Definer først funktionen f i hovedskærmen. Gå dernæst til Calc menuen og hent 3:limit( til indtastningslinjen. Tilføj  $f(x), x, \emptyset$ ), så der i indtastningslinjen står

og tast ENTER. Resultatet ses i skærmbilledet til venstre:



f har tilsyneladende ikke nogen grænseværdi i 0, men f har en grænseværdi fra såvel venstre som højre. Ved at tilføje parameteren -1 til limit, findes grænseværdien fra venstre

$$limit(f(x), x, \emptyset, -1)$$

og tilsvarende ved at tilføje parameteren 1til limit, findes grænseværdien fra højre. Se resultatet i skærmbilledet til højre.

## Differentialregning

Maskinen kan også differentiere symbolsk. Differentialkvotienter bestemmes ved at taste [a] — tastes som 2nd[8] — efterfulgt af det udtryk, der skal differentieres, og til sidst, hvilken variabel der skal differentieres med hensyn til. På nedenstående skærmbilleder kan du se nogle eksempler



Det er fornuftigt at definere en ny funktion ved

$$d(f(x), x) \rightarrow df(x)$$

Så vil df altid rumme differentialkvotienten af funktionen f, og f kan jo skifte indhold. Herefter kan du arbejde med df som med enhver anden funktion — herunder fx bestemme nulpunkter.

Nedenfor er  $f(x) = e^x - 2x - 2$  brugt som eksempel:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsA19ebraCalcOtherPr9MIOClean Up	F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsA19ebraCa1cOtherPr9mIOClean Up
$= \frac{d}{dx}(f(x)) \neq df(x) \qquad \text{Done}$	<pre>solve(df(x) = 0, x)</pre>
• $e^{\times} = 2 \cdot \times = 2 \Rightarrow f(\times)$ Done	(e - 2)·× - 2
<ul> <li>df(x)</li> <li>e[×]-2</li> </ul>	$\bullet (e-2) \cdot x - 2 \neq t(x) \qquad \text{Done}$
df(x) Main Rabauto Func 3/30	ans(1)→t(x) Main Babauto Func 3/30

På det andet skærmbillede er nulpunktet for differentialkvotienten df fundet. Desuden er vist, hvordan du bestemmer tangenten til f i punktet med førstekoordinaten 1ved at benytte tangentligningen

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

I sidste linje er vist, hvordan tangenten kan defineres som en funktion af x.

Hvis du i grafvinduet taster

#### F5 A:tangent

og indtaster en xværdi, så *tegnes* tangenten til den aktuelle funktion i x. Du får også tangentligningen oplyst, men tangentigningen kan ikke overføres til funktionslisten i [Y=]editoren.

# Matematiske modeller

Med Flash-applikationen Stats/List Editor (SL-editor) får du adgang til et væld af værktøjer, der gør arbejdet menustyret og meget fleksibelt. Hvis du ikke har applikationen installeret, skal du installere den fra den medfølgende CD. I dette afsnit vil du lære at

- indtaste i SL- editoren
- plotte måledata
- udføre lineær regression
- udføre eksponentiel regression
- udføre potens regression
- lave en grafisk modelkontrol



#### Hvis du ikke har installeret Appsskrivebordet, kommer du direkte til Flash applikationerne med (•)[APPS].

# SL-editor

Til indtastning af data skal du benytte SL-editoren. Start Stats/List Editor fra Apps-skrivebordet. Første gang du starter SL-editoren, får du dette skærmbillede:

F1 Menu	Stats/List Editor	13:34 07/05/03
Folder S	election for Statistics A	IPPlication
Your Cu	rrent Folder is: main	
Select 0	urrent Folder: 📶 Ə	
Creater	new folder.	
Enter=		
USE + AND	+ TO OPEN CHOICES	

Tast blot ENTER og SL-editoren er klar til brug.

list1,list2, ...,list6 er listevariabler, som Stats/List Editor har oprettet. Check dette med [VAR-LINK].

F1+ F2+ Tools Plots	F3+F4+ F ListCa1cDis	5+ F6+ F7+ str Tests ints	$\square$
list1	list2	list3	list4
11-+1-	<u> </u>		
11501-	<u></u>		

# Indtastning

Du skal nu indtaste tallene i nedenstående tabel, der viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

Dybde (m)	10	13	35	40	100
Tryk(atm)	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60

Start med at flytte den sorte markering ned i feltet under list1. Når du indtaster det første tal, 10, skriver du i indtastningslinjen. Afslutter du med  $\boxed{\text{ENTER}}$  eller  $\bigcirc$ , placeres det indtastede i tabellen på markørens position. Indtast således tabellens værdier som vist på skærmbilledet nedenfor:

F1+ F2+ Tools Plots	F3+F4+ F ListCa1cDis	5+ F6+ F7+ str Tests ints	
list1	list2	list3	list4
10 13 35 40 100	1.96 2.25 4.36 4.84 10.6		
list2[6]=			
MAIN	RAD AUTI	I FUNC	2/ 6

# Plot af data

Tast F2 for Plots. Vælg først 3:PlotsOff for at deaktivere alle gamle plots, dernæst 4:FnOff for at deaktivere alle funktioner i [Y=]-editoren, og endelig 1:PlotSetUp...



Tast F1 for Define, og Plot SetUp er klar til udfyldning.

Her skal du først vælge Plot Type. Som standard er valgt Scatter (punktgraf), og det er det, du skal bruge.

Redigering i det indtastede sker ved, at du med piletasterne placerer markeringen i det felt, du vil redigere. Redigeringen foretages i indtastningslinjen og afsluttes med ENTER. Du sletter et listeelement med 🖛 og indsætter et nyt med [INS]. Pil ned til Mark med  $\odot$ . Her kan du vælge, hvilke markører grafen skal tegnes med. Box er OK, men hvis du vil se på eller lege med de andre muligheder, skal du trykke på  $\odot$ .

De næste to felter skal du udfylde. Udfyldningen sker lettest vha. [VAR-LINK], hvor du vælger hhv. listl og list2, men du kan selvfølgelig også skrive navnene direkte.

Tast to gange **ENTER**, og du returnerer til plotlisten, som viser dine valg i piktogramform.

Define Plot 1       Plot Type     Scatter ÷       Mark     Box ÷       X     Bist1       y     Bist2       Bist2     Bist2 <th>Plot Setup Plot Setup Define Copy(Clear / ZoomData) Plot 2: Plot 3: Plot 4: Plot 5: Plot 5: Plot</th>	Plot Setup Plot Setup Define Copy(Clear / ZoomData) Plot 2: Plot 3: Plot 4: Plot 5: Plot
MAIN RADIAUTO FUNC 2/6 1	MAIN RADIAUTO FUNC 2/6

Tast F5 for ZoomData, og plottet tegnes:

F1+ F2+ F3 F4 F5+ F6 ToolsZoomTraceRe9raphMathDro	i+ F7+SX IWPen>(
MAIN RAD AUTO FUNC	•••••

Tast []] for at vende tilbage til SL-editor.

# Lineær regression

Skemaet viser trykket i forskellige dybder under havoverfladen

Dybde (m)	10	13	35	40	100
Tryk(atm)	1.96	2.25	4.36	4.84	10.60

Gør rede for, at trykket med god tilnærmelse er en lineær funktion af dybden. Find trykket i en dybde på 150 m, og bestem den dybde, hvor trykket er 30 atm.

Trace (F3) virker også i punktgrafer: Du kan altså aflæse de enkelte plotpunkters koordinater nederst på skærmen. Brug Trace til at checke, at alle punkter er korrekt indtastede. Dataene er de samme som i det foregående afsnit. Indtastning og fremstilling af et plot af dataene foregår som allerede beskrevet.

Et kig på plottet viser, at punkterne ser ud til at ligge på en ret linje. Med lineær regression kan du finde den bedste rette linje gennem punkterne:

I SL-editoren taster du F4 for at aktivere Calc menuen. Her piler du ned til 3:Regressions, taster ENTER og vælger 2:LinReg(ax+b):



Brug [VAR-LINK] til at udfylde x- og y-feltet med list1 og list2, hvor dataene befinder sig. Feltet Store RegEq to... giver dig mulighed for at gemme den beregnede regressionsligning i en af funktionerne i [Y=]editoren, fx y1, men det er ikke påkrævet.



Tryk [ENTER], og resultatet af regressionen vises. Når du trykker [ENTER] for at lukke regessionsvinduet, vises en liste med navnet resid i SL-editoren. Denne liste viser forskellen mellem de observerede værdier og de værdier, der beregnes vha. regressionsligningen (mere herom senere):

Studiet af resid (residualerne) er meget nyttigt i forbindelse med vurderingen af en models kvalitet. Det vil imidlertid føre for vidt at komme ind på dette.



Trykker du herefter [GRAPH], vil regressionslinjen blive tegnet sammen med datapunkterne, forudsat du stadig har ZoomData indstillingen i behold.



Har du gemt regressionsligningen i y1, kan du blot referere til denne ved bestemmelsen af trykket i en dybde på 150 m:  $y1(15\emptyset)$ . Tilsvarende kan den dybde, hvor trykket er 30 atm., findes ved at løse ligningen  $y1(x)=3\emptyset$ .

Hvis du ikke har gemt regressionsligningen i y1, kan du få fat i den via [VAR-LINK]. Det første skærmbillede nedenfor viser skærmen, efter at du har tastet [VAR-LINK]. Tast ④ for at lukke MAIN-mappen — du kan altid åbne den igen med ④. STATVARS-mappen kommer til syne:



I STATVARS-mappen finder du en række variabler, der alle er resultat af den regression, du lige har udført.

Pil ned på regeqn og tast ENTER, så du får statvars \regeqn ( indsat i indtastningslinjen. Du skal selv slutte af med x):



Du er nødt til at have referencen til statvars med i funktionsnavnet — i modsat fald vil regeqn(x) referere til en funktion i MAIN-mappen, og en sådan findes ikke. Tilsvarende bemærkninger om de øvrige variabler i STATVARS-mappen (se det andet skærmbillede ovenfor).

Resultatet af regressionen viser tillige to størrelser:  $r \text{ og } r^2$ , kaldet korrelationskoefficient og forklaringsgrad hhv. Almindeligvis regnes en model for acceptabel, hvis  $r^2$  er over 0.95, og glimrende, hvis  $r^2$  er over 0.99. Din lineære model er altså glimrende!

# Gør klar til ny dataanalyse

Åbn Tools-menuen med F1 og vælg 3:Setup Editor. I feltet Lists To View skal du blot taste ENTER. Dette vil slette alle lister undtagen list1, list2, ..., list6 — resid slettes også.



Indholdet af listerne sletter du således: Pil op på navnet list1, tast CLEAR og pil hen på list2, tast CLEAR osv.

# **Eksponentiel regression**

Tabellen viser antallet af tankstationer i Danmark på forskellige tidspunkter:

År	1975	1980	1985	1990	1995
Antal	5205	4397	3622	3031	2647

Gør rede for, at antallet af tankstationer med god tilnærmelse er en eksponentielt aftagende funktion af antal år efter 1975.

Giv et skøn over antallet af tankstationer i år 2005, hvis den eksponentielle udvikling fortsætter.

I feltet Lists To View kan du skrive navnene på de lister blandt list1, list2, ..., list6, du vil se i editoren. Rens SL-editoren. Du kan selvfølgelig ved håndkraft trække 1975 fra alle årstallene og lave indtastningen som før, men maskinen kan også klare det:

Start med at indtaste årstallene i list1, flyt markøren op på list2 og tast <u>ENTER</u> (det første skærmbillede). Markøren befinder sig nu i indtastningslinjen. Her skriver du list1-1975 (det andet skærmbillede), og tast <u>ENTER</u>. Straks bliver list2 udfyldt (det tredje skærmbillede). Indtast til slut antal i list3:



Regressionen udføres som tidligere: Tast F4, vælg 3:Regressions, pil ned til 8:ExpReg og tast ENTER]. Indstil som vist nedenfor og afslut med ENTER]:



Den sidste del af opgaven løses ved at beregne  $y1(3\emptyset)$ . Maskinen giver resultatet 1840.84. Hvis den eksponentielle vækst fortsætter efter 1995, vil der således kunne forventes at være ca. 1840 tankstationer i år 2005.

TI-89 Titanium / Voyage 200 giver forskriften på formen  $ab^x$  og ikke, som du er vant til, på formen  $ba^x$ .

(ExpReg giver foruden den sædvanlige residualliste resid en ny liste, residt, med residualer knyttet til den lineære tilpasning af de transformerede data)

#### Tip

**TI-89 Titanium** Det kan være lidt omstændeligt at skulle skrive list1 du kan i stedet hente list1 med [VAR-LINK].

[VAR-LINK] virker også med forbogstaver til hurtig søgning, dvs. tast [VAR-LINK] 1 for at finde listerne og brug evt. ♥ og ▲ til at bladre en hel side ad gangen. Du kan naturligvis også her fremstille et plot, der viser den beregnede eksponentialfunktion indtegnet sammen med datapunkterne. Det foregår stort set, som du tidligere har set.

Hvis du har fulgt det foregående slavisk, er regressionsligningen allerede på plads i y1. Gå ind i SL-editoren, tast F2 for Plots og vælg 1:Plot Setup. Redigér definitionen af Plot1 som vist nedenfor og afslut med ENTER. Tegn plottet med ZoomData (F5):



Den gamle metode med brug af enkeltlogaritmisk papir kan efterlignes på TI-89 Titanium / Voyage 200:

Først skal du i SL-editoren i list4 udregne logaritmen til tallene i list3. Logaritmefunktionen log(x) findes ikke på tastaturet, men den kan du blot skrive selv. Når logaritmen til tallene i list3 ikke bliver udregnet i list4, hænger det sammen med, at tallene i list3 er hele tal, og at muligheden for en senere eksakt beregning ikke skal forspildes. Havde der stået en række decimaltal, ville en udregning finde sted. Herefter skal du lave en lineær regression på list2 og list4:



Det sidste skærmbillede svarer til, at punkterne og regressionslinjen er indtegnet i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem. For at se at resultatet bliver det samme som før, skal du regne lidt.

Den regression, du lige har lavet, giver en lineær sammenhæng mellem x og log(y) bestemt ved:

$$\log(y) = 3.71435392749 + (-0.014978082287)x$$

Du kan bruge TI-89 Titanium / Voyage 200 til at isolere y i denne ligning. Hidtil er alle dine beregninger foregået i MAIN, men for at spare tastearbejde er det lettere at skifte til STATVARS, hvor der er direkte adgang til koefficienterne a og b:

Tast MODE og pil ned til Current Folder (aktuel mappe), tast () og vælg mappen STATVARS ved at taste ENTER. Afslut og gem med ENTER:

MODE	MODE
F1 F2 F3 Page 1 Page 2 Page 3	F1 F2 F3 Page 1 Page 2 Page 3
Graph	Graph
(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)	(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)
MAIN RAD AUTO FUNC	MAIN RAD AUTO FUNC 0/30

Læg mærke til, at MAIN i venstre side af statuslinjen nu er ændret til STATVARS, der nu er aktuel mappe.

Ovenstående ligning løses med hensyn til y således:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsA19ebraCa1cOtherPr9mIOClean UP
• • • 1······· 1 • · · · · · · · · · · ·
■ solve(log(g) = b + a·x, g) g = 5180.28826617 (.96609)
solve(log(y)=b+a*x,y) STATVARS RADAUTO FUNC 1/30

hvilket er præcis det samme resultat, du fik ved at benytte ExpReg på list2 og list3, hvilket tyder på, at det netop er sådan, maskinen gør, når den laver eksponentiel regression.

Alternativt kan du kopiere a og b til MAIN-mappen i [VAR-LINK]. Markér a og b med flueben. I Manage menuen vælger du 2:Copy med indstillingen to main.

## Potens regression

Tabellen viser for en bestemt type gasledning sammenhængen mellem gasstrøm, målt i m³ pr. time, og tryktab pr. meter ledning, målt i millibar:

Gasstrøm	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0
Tryktab	0.002	0.008	0.033	<b>0</b> .074	0.130	0.204	0.294	0.522	0.816

Det oplyses, at tryktabet pr. meter ledning som funktion af gasstrømmen med tilnærmelse er en funktion af formen  $f(x) = b \cdot a^x$ .

Bestem tallene  $a \circ g b$ .

Rens SL-editoren og indtast de to dataserier i list1 og list2. Regressionen på listerne udføres som tidligere: Tast [F4], vælg 3:Regressions, pil ned til 9:PowerReg og tast ENTER. Udfør regressionen på list1 og list2, gem regressionsligningen i y1 og afslut med [ENTER]:

TI-89 Titanium / Voyage 200 giver forskriften på formen  $ax^b$  og ikke som du er vant til, på formen  $bx^a$ .

F1+ F2+ ToolsPlots	F3+F4+F ListCa1cDis	5+ F6+ F7+ str Tests Ints		F1+ T007	F2+ F3+ F4+ F5-	F6+ F7+	$\square$
list1	list2	list3	list4	1i	rowern	e3	=14
.5 1. 2. 3. 4.	.002 .008 .033 .074 .13 .204			5 1.23 45	y=a#x*b a =.00 b =2.0 r ² =.99 r =.99 <u>(Enter=0K)</u> 1.204	8074878667 0675834897 998230292 9991151421	
list2[	1]=.002			li⊆	t2[1]=.002		
MAIN	RAD AUTI	I FUNC	27.8	MAIN	RAD AUTO	FUNC	27.8

Plottet ser sådan ud:



Den gamle metode, med brug af dobbeltlogaritmisk papir, kan også efterlignes på TI-89 Titanium / Voyage 200: I list3 og list4 udregner du logaritmen til list1 og list2, og laver lineær regression på list3 og list4:



Igen skal der regnes lidt for at se, at der er overensstemmelse mellem de to metoder. Den regression, du lige har lavet, giver en lineær sammenhæng mellem log(x) og log(y) bestemt ved:

 $\log(y) = -2.09286399466 + 2.00675834897\log(x)$ 

Skift til STATVARS-mappen og isolér y i denne ligning:

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 ToolsAl9ebraCalcOtherPr9MIOCle	67 90 UP
<pre>solve(log(y) = b + a · 10</pre>	og(x)♪ 0067⊾
solve(log(y)=b+a*log(	x),y…

hvilket er præcis det samme resultat, du fik ved at benytte **PowerReg** på list1 og list2, hvilket tyder på, at det netop er sådan, maskinen gør, når den laver potens regression.

Skift tilbage til MAIN-mappen.

# Sandsynlighedsregning

Med Stats/List Editor får du også en lang række statistiske funktioner stillet til rådighed. Hvis du ikke har applikationen installeret, skal du installere den fra den medfølgende CD. I dette afsnit skal du se på

- binomialfordelingen
- normalfordelingen
- den inverse normalfordeling
- middelværdi og spredning af stokastiske variable

# Binomialfordelingen

Lad *X* være en binomialfordelt stokastisk variabel med antalsparameter *n* og sandsynlighedsparameter *p*. Stats/List Editor applikationen leverer fordelings-funktionen binomCdf (c for kumuleret sandsynlighed og df er en forkortelse for distribution function), der fungerer således:

$$P(i \le X \le j) = \text{binomcdf}(n, p, i, j)$$

Hvis du skal bestemme punktsandsynligheden P(X = i) skriver du bare binomcdf (n, p, i, i). Fordelingen er tilgængelig i SL-editoren, hvor den virker via dialogbokse og naturligvis også i hovedskærmen.

I et eksperiment E er sandsynligheden 15% for, at en bestemt hændelse H indtræffer. Eksperimentet E udføres 22 gange, og de enkelte udførelser er uafhængige af hinanden.

Bestem sandsynligheden for, at H indtræffer netop 2 gange. Bestem sandsynligheden for, at H indtræffer højst 2 gange. Bestem sandsynligheden for, at H indtræffer mindst 2 gange.

Hvad er det største antal gange, eksperimentet E må udføres, hvis sandsynligheden for, at H indtræffer højst 2 gange, ikke må komme under 50%?

Hvis X betegner det antal gange, H indtræffer, er X binomialfordelt med parametrene n = 22 og p = 0.15.

Start SL-editoren (se side 50), tast F5 og vælg **Binomial Cdf**. Udfyld dialogboksen som vist og tast ENTER to gange:



Resultatet, P(X = 2) = 0.20145, står nu til direkte aflæsning. Det sidste skærmbillede viser indtastningen til bestemmelse af  $P(X \le 2)$ . For at bestemme  $P(X \ge 2)$ , skal Lower Value sættes 2 og Upper Value til 22.

Nedenfor ser du, hvordan hele opgaven løses i hovedskærmen: binomCdf finder du ved at åbne CATALOG og taste F3 for at åbne listen med kommandoer fra Flash-applikationer. Tast b, og straks står markøren ved de søgte funktioner. Kopier til indtastningslinjen med [ENTER]:

Applikationspræfikset tistat. tilføjes for ikke at få uheldige navnesammenfald med andre applikationer. Når kommandoerne hentes i Catalog sættes præfikset automatisk på.

HelpBuilt-in[Flash Apps]User-Defined → ANOVA( TIStat ANOVA2wy( TIStat binomCdf( TIStat binomPdf( TIStat chi22way( TIStat chi2Cdf( TIStat chi2GOF( TIStat chi2GOF( TIStat chi2Pdf( TIStat L1/L2(L3//L2011 (N1/21/S%13//1	HelpEuilt-in[Flash Apps]User-Defined         ▶ binomCdf(TIStat         binomPdf(TIStat         chi22Wau(TIStat         chi2Cdf(TIStat         chi2Cdf(TIStat         chi2Cdf(TIStat         chi2Cdf(TIStat         chi2Cdf(TIStat         chi2Cdf(TIStat         chi2Cdf(TIStat         chi2Cdf(TIStat         chi2Pdf(TIStat         chi2Pdf(TIStat         chi2Pdf(TIStat         chi2Pdf(TIStat         NFFLEW/UP1
F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsA19ebraCa1cOtherPr9mIOClean Up	F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+ ToolsAl9ebraCalcOtherPr3mlOClean UP
	4tat.binomcdf(22,.15,2,2) .201452676703
	<pre>4tat.binomcdf(22,.15,0,2) .338176922604</pre>
	4st.binomcdf(22,.15,2,22) .863275754099
TIStat.binomCdf(	at.binomcdf(22,.15,2,22) MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

Til det sidste spørgsmål er ideen den at opfatte binomCdf(x, $\emptyset$ .15, $\emptyset$ ,2) som en funktion af x og løse ligningen binomCdf(x, $\emptyset$ .15, $\emptyset$ ,2) =  $\emptyset$ .5, ved at tabellægge funktionen.

Indsæt binomCdf(x, $\emptyset$ .15,2) i [Y=]-editoren, indstil TABLE ([TblSet]) så både tblStart og  $\Delta$ tbl er 1. Tast [TABLE] og pil ned i tabellen:

F1+ F2+F3 F4 F5+F6+ :2 Tooss200mEdit / A11 Style:***. *PLDTS Plot 2: Plot 1: /y1=tistat.binomcdf(x,.15) y2= y3= y4= y5=	F1+         F2         F3+         F2+         F3+         F2+         F3+         F2+         F3+         F2+         F3+         F2+         F3+         F3+
y2(x)=	×=18.
MAIN RAD AUTO FUNC	MAIN RAD AUTO FUNC

Af tabellen ses, at 17 er største antal gange, eksperimentet E må udføres, hvis sandsynligheden for, at H indtræffer højst 2 gange, ikke må komme under 50%.

# Middelværdi og spredning

Sandsynlighedsfordelingen for en stokastisk variabel X er givet ved

Beregn middelværdi og spredning for X.

I SL-editoren indtaster du udfaldene i list1 og sandsynlighederne i list2. Tast F4, vælg 1:1-Var Stats og udfyld som vist nedenfor:

F1+ F2+ ToolsPlots	F3+F4+ F ListCa1cDi	5+ F6+ F7+ str/Tests/Ints		F1+ F2+ F3+ F4+ F5+ F6+ F7+ ToolsPlotsList Cale Distr TestsInts
list1	list2	list3	list4	list1 li <u>1:1-Var Stats…</u>
1 3 5 7 9	.15 .4 .25 .15 .05			1 .1 2:2°ar Stats… 3 .4 4:Probability → 5 .2 5:CorrMat… 7 .1 6:Show Stats… 9 .05
list2[6]=				list2[6]=
MAIN	RAD AUTI	O FUNC	2/ 6	TYPE OR USE ++++ CENTER3 OR CESC3



Middelværdien kan aflæses til  $\bar{x} = 4.1$ , spredningen til  $\sigma x = 2.14$  og summen af sandsynlighederne i form af n = 1.

# Normalfordelingen

Lad *X* være en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi  $\mu$  og spredning  $\sigma$ . Intervalsandsynlighederne  $P(i \le X \le j)$  findes som

 $normCdf(i,j,\mu,\sigma)$ 

**normCdf** finder du CATALOG. Fordelingen er tilgængelig i SL-editoren (dialogbokse) og i hovedskærmen.

Lad X være en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi 0.93 og spredning 0.2. Find  $P(X \le 1.1)$ ,  $P(0.90 \le X \le 1.0)$ ,  $P(X \ge 1.4)$  og løs ligningen  $P(X \le x) = 0.98$ .

Igen kan SL-editoren bruges: Start SL-editoren, tast F5 og vælg Normal Cdf. Udfyld dialogboksen som vist og tast ENTER to gange:



Herefter kan  $P(X \le 1.1) = 0.8023$  umiddelbart aflæses.  $P(0.90 \le X \le 1.0)$  finder du ved at sætte Lower Value til Ø.9Ø og Upper Value til 1.Ø. Endelig finder du  $P(X \ge 1.4)$  ved at sætte sætte Lower Value til 1.4 og Upper Value til  $\infty$ .

Hele opgaven løses i hovedskærmen: Til det sidste spørgsmål kan du bruge enten nSolve eller den inverse normalfordeling, invNorm, der kan hentes fra CATALOG. Bemærk, at resultaterne ikke bliver helt ens:

Den inverse normalfordeling findes også med dialogbokse i Distr-menuen (F5) i SL-editoren under 2:Inverse.

F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+	F1+ F2+ F3+ F4+ F5 F6+
ToolsAl9ebraCalcOtherPr9miDClean Up	ToolsA19ebraCa1cOtherPr9mIOClean Up
■ tistat.normcdf( ~0,1.1,.9) .802337508206	
tistat.normcdf(.9,1,.93)	■ nSolve(tistat.normcdf( -∞ )
.196448302598	1.34074950371
■ tistat.normcdf(1.4,∞,.93)	tistat.invnorm(.98,.93,.)
.009386687407	1.34074978212
t.normCdf(1.4,∞,.93,.2)	Stat.invNorm(.98,.93,.2)
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30	MAIN RADAUTO FUNC 2/30

Dette eksempel viser, at med SL-Editor applikationen bliver den sædvanlige normalfordelingstabel overflødig. I det næste eksempel skal du se to opgaver, hvor man typisk ville benytte sig af sandsynlighedspapir:

- Lad X være normalfordelt med middelværdi 2000. Undersøgelser har vist, at sandsynligheden for, at X antager en værdi over 2050, er 10%. Vurdér spredningen af X.
- Lad X være normalfordelt med spredning 5. Undersøgelser har vist, at sandsynligheden for, at X antager en værdi på mindre end 110 er 2%. Bestem middelværdien for X.

1) At sandsynligheden for, at *X* antager en værdi over 2050 er 10%, kan oversættes til P(X > 2050) = 0.1. Ligningen, du skal løse, er derfor

 $\operatorname{normCdf}(2\emptyset5\emptyset, \infty, 2\emptyset\emptyset\emptyset, x) = \emptyset.1$ 

Maskinen er ikke glad for at løse ligningen, da den også prøver med negative værdier af x. Begræns derfor til x>0 med with-operatoren.

2) Løses tilsvarende. Her er ligningen blot

 $\operatorname{normCdf}(-\infty, 110, x, 5) = 0.02$ 



# 8

# Flash applikationer

#### Advarsel

Alle applikationer og data forsvinder fra maskinen, når du installerer et nyt operativsystem, så det anbefales, at du laver Backup af din TI-89 Titanium / Voyage 200 før overførsel af et nyt operativsystem: Klik på Backup ikonen øverst i TI-Connect vinduet.

#### Tip:

På de næste sider finder du en stepby-step beskrivelse af, hvordan du overfører operativsystem og flashprogrammer mellem to maskiner. Dette er meget hurtigere end at bruge en computer.

Har en af dine kammerater det nyeste operativsystem eller en Flash applikation, du ikke har, ja så kan I klare det ved at koble jeres maskiner sammen. Advarsel

Sørg for at have friske batterier i maskinen, før du starter på en overførsel, og afbryd ikke overførslen. Til download af Flash applikationer i din TI-89 Titanium / Voyage 200, skal du benytte USB-kablet eller et TI-GRAPH LINK kabel til at forbinde en computer (PC eller MAC) med din TI-89 Titanium / Voyage 200.

Softwaren **TI Connect** finder du på den CD, der fulgte med din TI-89 Titanium / Voyage 200, hvor du også finder en installationsvejledning.

Med TI Connect sker overførsel af filer og operativsystem til TI-89 Titanium / Voyage 200 ved starte DeviceExplorer og trække filer fra en Windows mappe til TI-89 Titanium / Voyage 200 ikonen i DeviceExplorer vinduet.



Hvis du vil have de aller nyeste versioner af operativsystem og applikationer, finder du dem på adressen *www.education.ti.com/danmark/* under "Pick-Up Window".

På den medfølgende CD finder du et væld af applikationer indenfor matematik, naturfag, teknik, sprog m.v, du uden videre kan installere på din TI-89 Titanium / Voyage 200.

Under sprog finder du det danske sprogmodul. Installerer du dette, kan du vælge dansk som sprog i [MODE] på page3 (tast [F3]).

MODE		
F1 F2 F3 Pa9e 1 Pa9e 2 Pa9e 3		
<ul> <li>Unit System</li> <li>Contore States</li> <li>Landwade</li> </ul>	SI <del>3</del> .1871 (-5178-15173-3)	
Apps Desktop	1:English 2:Dansk	
	3:Deutsch 4:Español	
(Enter=SAVE)	<u>5 Français</u>	
MAIN RAD AUTO	FUNC	

# Sådan overføres operativsystemet mellem to TI-89 Titanium eller to Voyage 200

Start med at forbinde de to TI-89 Titanium /Voyage 200 med det medfølgende kabel. Batterierne i de to maskiner skal være friske. Flade batterier kan resultere i sammenbrud under overførslen, og så skal operativsystemet indlæses via en computer. Overførslen sker således:

Advarsel Alle applikationer og	Modtager maskinen:	Afsender maskinen:
data forsvinder fra maskinen, når du installerer et nyt operativsystem, så det anbefales, at du laver	Tast [VAR-LINK] og [F3] for at komme ind i Link-menuen. Pil ned til 5:Receive OS	Tast [VAR-LINK] og [F3] for at komme ind i Link-menuen. Pil ned til 4:Send OS
Backup af din 11-89 Titanium / Voyage 200 før overførsel af et nyt operativsystem: Klik på Backup ikonen øverst i TI- Connect vinduet.	Manage Wiew Link (A112 Manage Wiew Link / A11 Contents: :::::::::::::::::::::::::::::::::::	Manage Wiew Link: Cana Fit- [72 Fig: PY Fit- Manage Wiew Link: / Mill Contents FlashApp MAIN 1: Send STATU 2: Receive 3: Send to TI-92 4: Send US 5: Receive 05 6: Send ID List
Advarsal	MAIN RAD AUTO FUNC	MAIN RAD AUTO FUNC
Sørg for at have friske batterier i maskinen,	og tast [ENTER]. En advarselsskærm	
før du starter på en overførsel, og afbryd ikke overførslen	kommer frem:	
ikke öventörsten.	Al hukommelse (RAM & Arkiv) vil	
	blive slettet	
	Fortsæt med ENTER, og maskinen	
	går i ventetilstand — se statuslinjen:	
	VAR-LINK: WAITING TO RECEIVE	
		Tast ENTER. En advarselsskærm kommer frem:
		Al hukommelse (RAM & Arkiv) vil blive slettet på modtagermaskinen
		Tast [ENTER], og operativsystemet vil blive overført.

# Sådan overføres Flash applikationer mellem to TI-89 Titanium / Voyage 200

Start med at forbinde de to maskiner med det medfølgende kabel. Batterierne i de to maskiner skal være friske. Flade batterier kan resultere i sammenbrud under overførslen.

Overførslen sker således:

Modtager maskinen:	Afsender maskinen:
Tast [VAR-LINK] og [F3] for at komme ind i Link-menuen. Pil ned til 2:Receive	Tast [VAR-LINK] og [F7] for at få vist listen over Flash applikationer på afsendermaskinen. Marker de appli- kationer, du vil overføre, med et flue- ben vha. [F4]:
— og tast [ENTER]. Maskinen går i ventetilstand — se statuslinjen:	USE > TO EXPAND
VAR-LINK: WAITING TO RECEIVE	Tast F3 for at komme ind i Link- menuen, og vælg menupunktet 1:Send
	VAR-LINK (FlashApp) F1+ F2 F2 F7 F5 F6 Mand3e View Link / All Contents FlashApp ✓ Stats 1: Send 2: Receive 3: Send it. 7: -9.2 4: Send OS 5: Receive OS 6: Send ID List TYPE DR USE ++1+ CENTER) DR CESCI
	Tast [ENTER], og overførslen starter.