Talfølger

John V Petersen

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Talfølger

art-science-soul

Indhold

Talfølger

En *følge* er en uendelig lang liste, følge af reelle tal $\mathbb{R}$

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Man bruger notationen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ for følger, hvor a_n er det n-te led i følgen, $n \in \mathbb{N}$.

> **Definition (konvergens af talfølger)**
>
> Følgen siges at *konvergere mod L*, og vi skriver
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \qquad \text{(grænseværdien for følgen er } L\text{)}$$
>
> hvis der for hvert $\epsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$, så $|a_n - L| \leq \epsilon$ for alle $n \geq N$.
>
> eller ved brug af kvantorer: $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} : |a_n - L| \leq \epsilon\ \ \forall\ n \geq N$.

Intuitivt er det, det samme som at sige, at a_n nærmer sig L når $n \to \infty$.

Hvis følgen ikke konvergerer mod noget tal L, siger vi, at den *divergerer.*

Vi vil forenkle notationen ved at definere $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv (a_n)$

eks. 1

$$\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots$$

og $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+0} = 1$, dvs. følgen konvergerer mod 1.

en nemmere måde at se på grænseværdien i praksis, er

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \to \quad \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

generelt $\quad a_n \to L \quad$ for $\quad n \to \infty$

eks. 2

Nogle eksempler på talfølger er

$1, 2, 3, 4, \ldots \qquad (a_n) = n$

$1, -2, 3, -4, \ldots \qquad (a_n) = (-1)^{n-1}\, n$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad (a_n) = \frac{1}{n}$

$1, 0, 1, 0, \ldots \qquad (a_n) = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n-1}\right)$

$2, 3, 5, 7, \ldots \qquad (a_n) =$ det n-te primtal .

eks. 3

Følger kan være givet **rekursivt,** hvor det n-te element ved en **rekursionsformel** er bestemt ud fra det (eller de) nærmest foregående. Det eller de første elementer i følgen må fastlægges eksplicit.

F.eks. er **fakultetsfølgen** $1, 2, 6, 24, 120, \ldots \qquad (a_n) = n!$

givet ved udgangselemntet $a_1 = 1$ og rekursionsformlen

$$a_n = n\, a_{n-1}\;,\quad n \geq 2$$

eks. 4

En anden rekursivt givet talfølge er **Fibonaccis talfølge**

Med udgangselementerne $F_1 = F_2 = 1$ og rekursionsformlen

$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}\;,\; n \geq 3$ fås følgen af Fibonacci tal:

$1\,,\; 1,\; 2,\; 3,\; 5,\; 8\,,\; 13,\; \ldots$

se min artikel [Fibonaccifølgen og det gyldne snit]

eks. 5

Vi vil vise, at talfølgen $(a_n) = \frac{1}{n}$ konvergerer mod 0, talfølgen har grænseværdien 0.

Vi skal altså, for ethvert positivt ϵ , gøre rede for, at der findes et naturligt tal N så

$$|a_n - 0| \le \epsilon \quad \text{for alle } n \ge N$$

Bevis:

$|a_n - 0| \le \epsilon$ for alle $n \ge N$

Nu er $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$, så kravet er, at der skal findes et N så $\frac{1}{n} \le \varepsilon$ når $n \ge N$.

Men $\frac{1}{n} \le \varepsilon \Leftrightarrow n \ge \frac{1}{\varepsilon}$. Så vi ser, at hvis blot N er et naturligt tal større end $\frac{1}{\varepsilon}$,

vil kravet for konvergens være opfyldt.

En følge kaldes

• *Voksende*	hvis	$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_3 \le \ldots$
• *Aftagende*	hvis	$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_3 \ge \ldots$
• *Opad begrænset*	hvis	der findes et tal M så $a_n \le M$ for alle n
• *Nedad begrænset*	hvis	der findes et tal M så $a_n \ge M$ for alle n

Sætning 6 (Fuldstændighedsegenskaben for følger)

1. Hvis en følge er *voksende* og *opad begrænset ,* så konvergerer den.
2. Hvis en følge er *aftagende* og *nedad begrænset ,* så konvergerer den.

Bevis:

(1) Antag, at følgen (a_n) er voksende og opad begrænset .

Så eksisterer $L = \sup\{a_n \mid n = 1, 2, 3 \ldots\}$.

Givet $\epsilon > 0$ eksisterer $N \ge 1$ så $|a_N - L| < \epsilon$.

Men da følgen er voksende og $a_n \leq L$ for alle n, får vi nu, at $|a_n - L| < \epsilon$ for alle $n \geq N$.

Dvs $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. $\square$

(2) Vises helt tilsvarende.

eks. 7

Givet følgen $a_1 = 0$ og $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + 1)}$ for $n \geq 1$.

a) Vis, at følgen er opad begrænset af 1.

b) Vis, at følgen er voksende.

c) Vis, at følgen konvergerer, og find grænseværdien.

ad a) Vi har $a_1 < 1$ og vi antager, at $a_n < 1$. Så får vi

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + 1)} < \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 1)} = 1 .$$

Altså, når $a_n < 1 \Rightarrow$ at også $a_{n+1} < 1$.

Dermed har vi, ved induktion, vist at $a_n < 1$ for alle n.

ad b) Ved at bruge $a_n < 1$, får vi

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + 1)} > \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + a_n)} = \sqrt{a_n} > a_n .$$

$\sqrt{a_n} > a_n$ når $1 > a_n$. Altså, er følgen voksende .

ad c) At følgen konvergerer får vi fra Sætning 1 . Vi skal så finde grænseværdien L .

Da vi ved, at L findes, kan vi prøve at finde L.

Vi ser på ligningen $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n + 1)}$ og lader

$n \to \infty$ på begge sider af lighedstegnet.

Vi får da $L = \sqrt{\frac{1}{2}(L+1)}$ dvs. $L^2 = \frac{1}{2}(L+1)$.

Vi løser andengradsligningen $L^2 - \frac{1}{2}L - \frac{1}{2} = 0$. $L = 1$ eller $L = -\frac{1}{2}$.

Da alle leddene i følgen er positive, er det kun løsningen $L = 1$ vi kan bruge.

dvs. følgen konvergerer mod $L = 1$.

Hermed er denne introduktion til talfølger færdig. Det var det grundlæggende ved talfølgers opførsel og konvergens.

Der er meget mere at vise og se på mht. talfølger, men denne introduktion skal i første omgang anvendes ved indførelse af rækker i en efterfølgende artikel, så vi stopper her.