Løsning af differentialligningsystem:

2 koblede differentialligninger af 1. orden

af John V. Petersen

Vi skal løse følgende system af differentialligninger:

$$x'_1 = x_1 + 2x_2$$

$$x'_2 = 3x_1 + 2x_2 \qquad (1)$$

De to differentialligninger er koblede: x_1 *og* x_2 optræder i begge ligninger.
Derfor kan vi ikke løse ligningerne på sædvanlig måde.

Vi vil derfor anvende teorien fra Lineær Algebra om egenværdier til at løse problemet:

Vi kan skrive systemet på matrix form:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

For at løse (1) finder vi så først egenværdierne for matricen **A,** λ_1 *og* λ_2 samt de tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$**.**

De fundne egenværdier og egenvektorer bruger vi så til at diagonalisere **A.**
(**D** betegner den diagonaliserede matrix.)

Det gør vi ved brug af $\mathbf{P} = \left[\, \boldsymbol{v}_1 \;,\; \boldsymbol{v}_2 \,\right]$, $\mathbf{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\;\boldsymbol{P}$ $\left(\boldsymbol{v}_1 \;,\; \boldsymbol{v}_2 \text{ er en basis for } \boldsymbol{P} \right)$

Ved en substitution $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ dekobler vi systemet (1).

Vi kan nu løse det dekoblede system på sædvanlig måde, og finde løsningerne y_1 *og* y_2.

Til sidst udregner vi blot $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ og finder løsningerne til (1) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Mere skematisk har vi opskriften på løsning af differentialligningssystemet af 1. orden:

1. *Opskriv matricen* $\boldsymbol{A}$ **for** *systemet*
2. *Find egenværdier* λ_1, λ_2 *og de til hørende egenvektorer* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$
3. *Opskriv* $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & , & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}$ *og udregn* $\mathbf{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{P}$
4. Indfør ny variabel og udfør substitutionen $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ og få det nye dekoblede system.
5. Løs det dekoblede system og find derved løsninger y_1 *og* y_2.
6. Udregn $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ og find derved løsningerne til systemet $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Opskriften kan umiddelbart udvides til at omfatte et system af 3, 4, 5, ..., n differentialligninger.

Nu vil vi følge opskriften og løse systemet (1):

1. Matricen for systemet (1) er: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Vi vil finde egenværdier λ_1, λ_2 for **A :**

Det karakteristiske polynomium **for** *A er*

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 4 \quad og \quad \lambda_2 = -1.$$

$\left(\boldsymbol{I}\ er\ enhedsmatricen: \quad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\ \right)$

N vil vi finde egenvektorerne $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ hørende til egenværdierne λ_1, λ_2.

Det gør vi ved at finde nulrummet for matricen $(\ \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$, dvs. løse $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ **.**

For $\lambda_1 = 4$: Vi finder nulrummet for $\boldsymbol{A} - 4\,\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Ved række reduktion : $\left[\ \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} \mid \mathbf{0}\ \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad , \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ er løsning.}$$

Så egenrummet $E_4 = span\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

Vi vælger $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Tilsvarende finder vi $\boldsymbol{v}_2$ *hørende til* $\lambda_2 = -1$: $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Vi kan v opskrive matricen som diagonaliserer $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{P} = \left[\ \boldsymbol{v}_1 \ , \ \boldsymbol{v}_2\ \right]$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ og } \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, hvor egenværdierne λ_1, λ_2 netop er værdierne i diagonalen.

4. Vi vil indføre en ny variabel $\mathbf{y}$ og udføre substitutionen $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ **.**

Derved får vi det nye dekoblede system:

$\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{x}' = \mathbf{P}\,\mathbf{y}'$ **.** Vi substituerer dette resultat ind i ligningen

$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ og får $\mathbf{P}\,\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{y} \;\Rightarrow\; \mathbf{y}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{P}\,\mathbf{y} = \mathbf{D}\,\mathbf{y}$ **.**

Så har vi det dekoblede system:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

5. Vi løser det dekoblede system:

$$y_1' = 4 \cdot y_1$$

med den generelle løsning

$$y_2' = -y_2$$

.

$$y_1 = C_1 \cdot e^{4 \cdot t}$$

$$y_2 = C_2 \cdot e^{-t} \qquad \text{eller} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^{4 \cdot t} \\ C_2 \cdot e^{-t} \end{bmatrix}$$

6. Til sidst udregner vi $\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{y}$ og finder løsningen til systemet (1)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^{4 \cdot t} \\ C_2 \cdot e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot C_1 \cdot e^{4 \cdot t} - C_2 \cdot e^{-t} \\ 3 \cdot C_1 \cdot e^{4 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-t} \end{bmatrix},$$

så $x_1 = 2 \cdot C_1 \cdot e^{4 \cdot t} - C_2 \cdot e^{-t}$ *og* $x_2 = 3 \cdot C_1 \cdot e^{4 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-t}$ *er løsning til* (1)

Løsningerne kan også skrives :

$$\boldsymbol{x} = C_1 \cdot e^{4 \cdot t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \cdot e^{4 \cdot t}\, \boldsymbol{v_1} + C_2 \cdot e^{-t}\, \boldsymbol{v_2} .$$

Dette udtryk kan nemt generaliseres til n x n systemer, hvor koefficient matricen er diagonaliserbar
.
Følgende sætning sammenfatter dette :

Sætning 1:

▼

A er en diagonaliserbar n x n matrice, og $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \cdots & \boldsymbol{v_n} \end{bmatrix}$

$$\textit{Der gælder , at} \quad \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{A} \; \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & & 0 \\ . & . & . & & . \\ & . & & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Så er den generelle løsning til differentialligningssystemet $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \boldsymbol{v_1} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \boldsymbol{v_2} + \; \cdots \; + C_1 \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \boldsymbol{v_n}$$