

Løsning af differentiaalligningsystem:

2 koblede differentiaalligninger af 1. orden

af *John V. Petersen*

Vi skal løse følgende system af differentiaalligninger:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + 2x_2 \\x'_2 &= 3x_1 + 2x_2\end{aligned}\quad (1)$$

De to differentiaalligninger er koblede: x_1 og x_2 optræder i begge ligninger. Derfor kan vi ikke løse ligningerne på sædvanlig måde.

Vi vil derfor anvende teorien fra Lineær Algebra om egenværdier til at løse problemet:

Vi kan skrive systemet på matrix form:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

For at løse (1) finder vi så først egenværdierne for matricen \mathbf{A} , λ_1 og λ_2 samt de tilhørende egenvektorer \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 .

De fundne egenværdier og egenvektorer bruger vi så til at diagonalisere \mathbf{A} . (\mathbf{D} betegner den diagonaliserede matrix.)

Det gør vi ved brug af $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ er en basis for \mathbf{P})

Ved en substitution $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ dekobler vi systemet (1).

Vi kan nu løse det dekomple system på sædvanlig måde, og finde løsningerne y_1 og y_2 .

Til sidst udregner vi blot $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ og finder løsningerne til (1) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Mere skematisk har vi opskriften på løsning af differentialligningssystemet af 1. orden:

1. Opskriv matricen \mathbf{A} for systemet
2. Find egenverdier λ_1, λ_2 og de til hørende egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$
3. Opskriv $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ og udregn $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$
4. Indfør ny variabel og udfør substitutionen $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ og få det nye dekkoblede system.
5. Løs det dekkoblede system og find derved løsninger y_1 og y_2 .
6. Udregn $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ og find derved løsningerne til systemet $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Opskriften kan umiddelbart udvides til at omfatte et system af 3, 4, 5, ..., n differentialligninger.

Nu vil vi følge opskriften og løse systemet (1):

1. Matricen for systemet (1) er: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Vi vil finde egenverdier λ_1, λ_2 for \mathbf{A} :

Det karakteristiske polynomium for A er

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4 \text{ og } \lambda_2 = -1.$$

(\mathbf{I} er enhedsmatricen: $\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}$)

N vil vi finde egenvektorerne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ hørende til egenverdierne λ_1, λ_2 .

Det gør vi ved at finde nulrummet for matricen $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$, dvs. løse $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

For $\lambda_1 = 4$: Vi finder nulrummet for $\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Ved række reduktion: $\left[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \mid \mathbf{0} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ er l\u00f8sning.}$$

S\u00e5 egenrummet $E_4 = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$.

Vi v\u00e4lger $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Tilsvarende finder vi \mathbf{v}_2 h\u00f8rende til $\lambda_2 = -1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Vi kan v opskrive matricen som diagonaliserer \mathbf{A} : $\mathbf{P} = \left[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \right]$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ og } \mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ hvor egenv\u00e6rdierne } \lambda_1, \lambda_2 \text{ netop er v\u00e6rdierne i diagonalen.}$$

4. Vi vil indf\u00f8re en ny variabel \mathbf{y} og udf\u00f8re substitutionen $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$.

Derved f\u00e5r vi det nye dekomplede system:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{P} \mathbf{y}' . \text{ Vi substituerer dette resultat ind i ligningen}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} \text{ og f\u00e5r } \mathbf{P} \mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{y} .$$

Så har vi det dekomplede system:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

5. Vi løser det dekomplede system:

$$y_1' = 4 \cdot y_1$$

med den generelle løsning

$$y_2' = -y_2$$

.

$$y_1 = C_1 \cdot e^{4t}$$

$$y_2 = C_2 \cdot e^{-t} \quad \text{eller} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^{4t} \\ C_2 \cdot e^{-t} \end{bmatrix}$$

6. Til sidst udregner vi $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ og finder løsningen til systemet (1)

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^{4t} \\ C_2 \cdot e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot C_1 \cdot e^{4t} - C_2 \cdot e^{-t} \\ 3 \cdot C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^{-t} \end{bmatrix},$$

så $x_1 = 2 \cdot C_1 \cdot e^{4t} - C_2 \cdot e^{-t}$ og $x_2 = 3 \cdot C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^{-t}$ er løsning til (1)

Løsningerne kan også skrives:

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \cdot e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \cdot e^{4t} \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot e^{-t} \mathbf{v}_2 .$$

Dette udtryk kan nemt generaliseres til $n \times n$ systemer, hvor koefficient matricen er diagonaliserbar

Følgende sætning sammenfatter dette:

Sætning 1:



A er en diagonaliserbar $n \times n$ matrice, og $\mathbf{P} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$

Der gælder, at $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} =$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Så er den generelle løsning til differentialligningssystemet $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} v_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} v_2 + \dots + C_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t} v_n$$