Newton-Raphsons metode

af John V. Petersen

Indhold

Numerisk analyse
Ved numerisk analyse forstås tilnærmet, talmæssig løsning af problemer, som ikke, eller kun med urimeligt stort besvær, kan løses teoretisk / eksakt.

De to grundlæggende synsvinkler i numerisk analyse er
1. at udvikle effektive, dvs. "hurtigt konvergerende" og ikke for omfangsrige metoder til at løse et foreliggende problem.
2. for en given metode at undersøge, hvor stor en fejl man begår ved at bruge metoden i stedet for at løse problemet - eller tænke sig det løst - eksakt.

Newton-Raphsons metode
Newtons metode også kendt som Newton-Raphson metoden er en iterativ proces indenfor matematikken til bestemmelse af nulpunkter for en funktion.
Det er en metode som beskrevet under punkt 1, ovenfor. Det er en metode som newton har udviklet sammen med Joseph Raphson, en engelsk matematiker, metoden har derfor også navnet Newton-Raphson metoden.

Metoden bruges til at finde eventuelle nulpunkter for en funktion $f(x)$. Altså finde en tilnærmet løsning af en ligning $f(x) = 0$. Udfra en gætteværdi x_0 beregnes en forbedret gætteværdi

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, og beregningen kan gentages (itereres), til den ønskede nøjagtighed er nået.

Udlede Newtons iterations formel
Den geometriske ide i metoden, ses i fig. 1. Vi begynder med at "gætte" et nulpunkt x_0. (Man skal studere funktionen (skitsere) så tilpas meget, at man ved, at x_0 er i nærheden af det nulpunkt, man ønsker at finde). Vi udregner tangenten til f i punktet $(x_0, f(x_0))$, og lader x_1 være skæringspunkt mellem denne tangent og x - aksen.

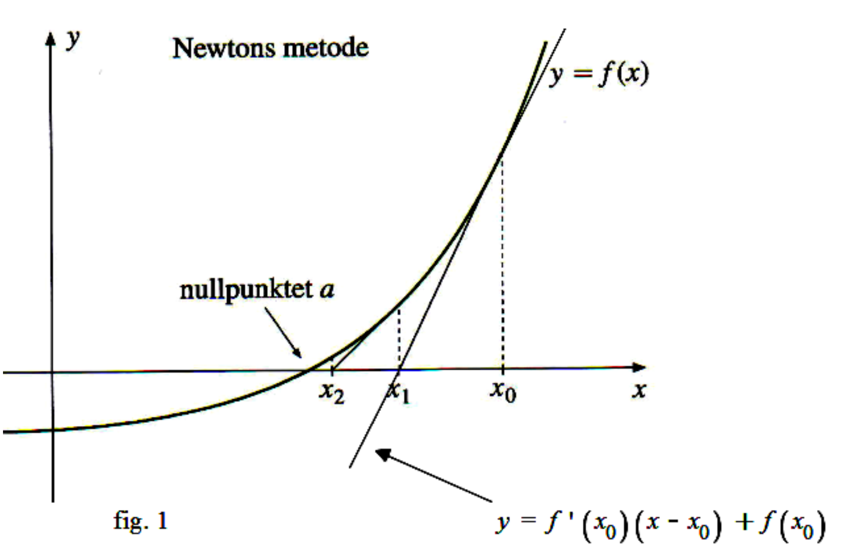


fig. 1

Som fig. 1 viser, vil x_1 normalt ligge nærmere nulpunktet end x_0. Så gentager vi proceduren; vi udregner tangenten i $(x_1, f(x_1))$, og lader x_2 være skæringspunkt mellem denne tangent og x - aksen. Almindeligvis er x_2 en endnu bedre tilnærmelse end x_1. Ved at fortsætte på denne måde, kan vi skaffe os en så god tilnærmelse som vi ønsker.

Antag at vi har fundet x_0, x_1, x_2, x_3, ... , x_n. Så skal vi finde en formel som fortæller os, hvordan vi kan udregne x_{n+1}. Vi ved, at x_{n+1} er skæringspunkt mellem x - aksen og tangenten i punktet $(x_n, f(x_n))$ (se fig. 2).

Denne tangent har ligningen

$$y - f(x_n) = f'(x_n)\,(x - x_n)$$

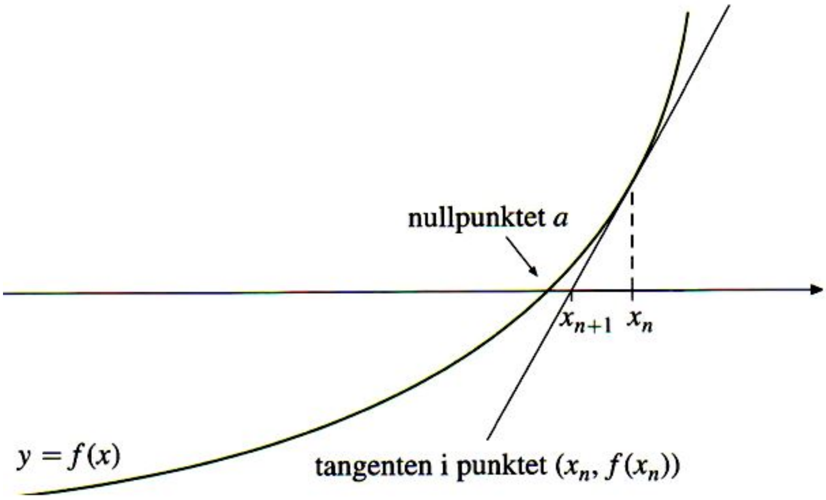


fig. 2

Da punktet $(x_{n+1}, 0)$ ligger på tangenten, må det passe i ligningen.

dvs.
$$0 - f(x_n) = f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(x_n)\,x_{n+1} = f'(x_n)\,x_n - f(x_n) \quad \Leftrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (\mathbf{1})$$

Denne formel (Newton-Raphsons iterationsformel) viser os, hvordan vi finder den $(n+1)$-te tilnærmelse x_{n+1}, når vi kender den n-te tilnærmelse x_n.

Sætning 1 Newtons metode Punkterne i Newtons metode er givet ved rekursionsformlen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Lad os anvende metoden.

Eksempel 1 Find en tilnærmet værdi for nulpunktet for funktionen $f(x) = 2 \cdot \sin x - x$, for $x \in \,]0 , \pi[$. På fig. 3 er funktionen skitseret.

Nulpunktet ser ud til at ligge nær $\frac{\pi}{2}$. Så vi vælger $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Ifølge formel **(1)** ovenfor er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2 \cdot \sin(x_n) - x_n}{2 \cdot \cos(x_n) - 1} .$$

for $n = 0$, får vi

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{2 - \frac{\pi}{2}}{2 \cdot 0 - 1} = \underline{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{2 \cdot \sin(2) - 2}{2 \cdot \cos(2) - 1} \approx \underline{1.9010}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 1.9010 - \frac{2 \cdot \sin(1.9010) - 1.9010}{2 \cdot \cos(1.9010) - 1} \approx \underline{1.8955}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 1.8955 - \frac{2 \cdot \sin(1.8955) - 1.8955}{2 \cdot \cos(1.8955) - 1} \approx \underline{1.8955}$$

Vi ser, at værdierne nu begynder at ligge meget tæt. Og det er et tegn på, at vi er kommet nær nulpunktet. Ønsker vi, at give resultatet med fire decimaler, er det rimeligt at angive 1.8955 som vores tilnærmede løsning. (En meget brugt tommelfingerregel siger: hvis du ønsker svaret givet med n decimalers nøjagtighed, skal du bruge Newtons metode, til du får de samme n decimaler to gange i træk). I praksis er det som regel en fornuftig strategi. Men der findes eksempler, hvor det giver et forkert svar.

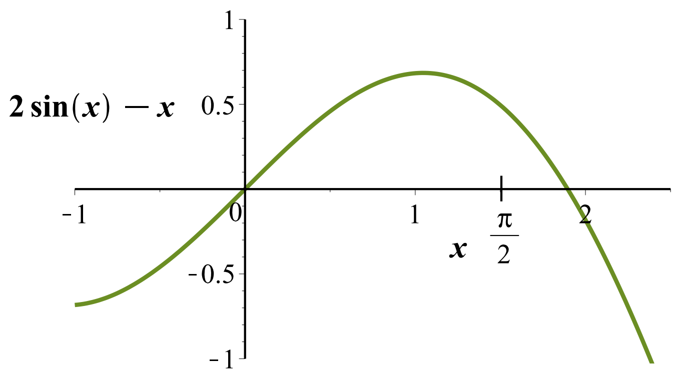


fig. 3

Fordele og ulemper
Ved Newtons metode er den primære fordel, i forhold til andre metoder, at metoden opfylder kvadratisk konvergens. Dette betyder at metoden under de rette omstændigheder konvergerer således at antallet af korrekte betydende cifre fordobles for hver iteration, som det også kan ses i eksemplet nedenfor (eks. 2).

Samtidig er der også visse ulemper ved metoden. Først og fremmest indgår differentialkvotienten til en funktion, som ikke nødvendigvis altid er lige let at bestemme. Desuden er metoden ikke altid helt pålidelig, og der findes eksempler hvor metoden aldrig vil konvergere (eks. 3).

Eksempel 2 Find en tilnærmet værdi for nulpunktet for funktionen $f(x) = \cos(x) - x^3$, for $x \in \,]\,0\,,\,1\,[$. På fig. 4 er funktionen skitseret.

Vi vælger $x_0 = 0.5$, $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f\,'(x_n)} = x_n - \dfrac{\cos(x_n) - x_n^{\,3}}{-\sin(x_n) - 3\cdot x_n^{\,2}}$.

For $n = 0$, får vi

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f\,'(x_0)} = 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5^3}{-\sin(0.5) - 3\cdot 0.5^2} \approx 1.112141637097$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f\,'(x_1)} = \ldots \approx \underline{0}.909672693736$$

$$x_3 = \ldots = \ldots \approx \underline{0.86}7263818209$$

$$x_4 = \ldots = \ldots \approx \underline{0.86547}7135298$$

$$x_5 = \ldots = \ldots \approx \underline{0.8654740331}11$$

$$x_6 = \ldots = \ldots \approx \underline{0.865474033102}$$

De korrekte cifre er understreget. I tilfældet x_6 , er x korrekt i alle de givne decimaler. Vi ser, at antallet af korrekte decimaler stiger fra 2 (for x_3) til 5 og derefter 10, som illustrerer den kvadratiske konvergens.

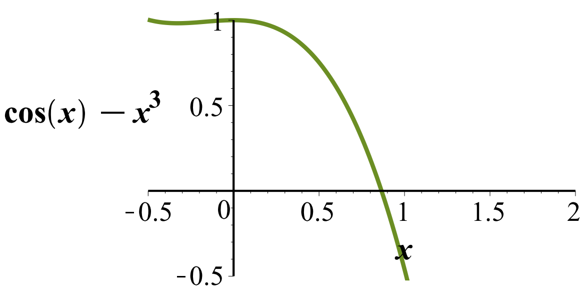


fig. 4

Newtons metode er hurtig og effektiv, når den virker. Men der er flere ting, som kan gå galt. Fig. 5 viser en af de almindelige fejlkilder: Starter vi for langt fra nulpunktet, risikerer vi, at følgen divergerer isf. at konvergere!

Eksempel 3 Find en tilnærmet værdi for nulpunktet for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & hvis \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & hvis \quad x \geq 0 \end{cases}$$

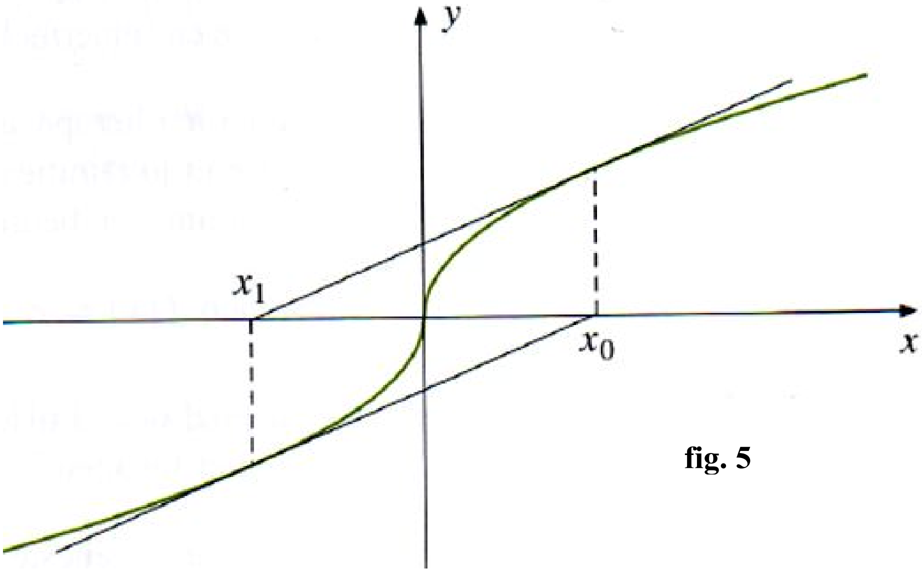


fig. 5

Vælg $x_0 > 0$. Så er

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x_0}}} = -x_0 \quad .$$

Beregner vi x_2, får vi

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{-\sqrt{-x_1}}{\frac{-1}{-2\cdot\sqrt{-x_1}}} = x_1 - \left(-2\cdot(-x_1)\right) = -x_1 = x_0 \,.$$

Dvs. uanset hvilken begyndelsesværdi (x_0) vi vælger, vil følgen $\{ x_n \}$ alternere mellem værdierne x_0 og $-x_0$. I dette tilfælde hjælper det altså ikke at vælge begyndelsesværdien nær nulpunktet. Vi får ikke konvergens alligevel.

Betingelser for konvergens
I sætning 2, nedenfor, ser vi betingelserne for konvergens.

Beviset for sætning 2 (og et Korollar - som følger af beviset - og bl.a. kan bruges til at estimere nøjagtigheden, når vi bruger Newtons metode) vises i et efterfølgende appendiks.

I sætningen bruges betegnelsen "en omegn om a". En omegn om a, er et interval af bredden δ om a, hvor δ er en infinitesimal størrelse, større end 0.
Det kaldes kort ω. $\omega(a) = \,]a - \delta, a + \delta[$.

Sætning 2 Betingelser for konvergens ved brug af Newtons metode

Antag, at $f(a) = 0$, at $f'(a) \neq 0$ og at $f''(x)$ eksisterer og er kontinuert i en omegn om a. Så findes der et $\delta > 0$, så følgen $\{x_n\}$ i Newtons metode, konvergerer mod a hvis $x_0 \in \omega(a)$.

I eksempel 3, ovenfor, hvor der ikke er konvergens, kan vi nu se hvilke forudsætninger for konvergens, der ikke er opfyldt: Funktionen f er ikke (to gange) differentiabel i en omegn om 0, da $f'(0)$ ikke eksisterer.

Appendiks

A1 Bevis for Sætning 2

> **Sætning 2 Betingelser for konvergens ved brug af Newtons metode**
>
> Antag, at $f(a)=0$, at $f'(a) \neq 0$ og at $f''(x)$ eksisterer og er kontinuert i en omegn om a. Så findes der et $\delta > 0$, så følgen $\{x_n\}$ i Newtons metode, konvergerer mod a hvis $x_0 \in \omega(a)$.

Definer en ny funktion g ved $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Vi ser, at $g(a) = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} = a$, da $f(a)=0$ og $f'(\text{a}) \neq 0$.

Endvidere ser vi, at følgen $\{x_n\}$ i Newtons metode er givet ved

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n) \ .$$

Differentierer vi $g(x)$, får vi

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x)f'(x) - f(x)f''(x))}{f'(x)^2} = 1 - \frac{f'(x)^2}{f'(x)^2} + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \quad .$$

Så $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$

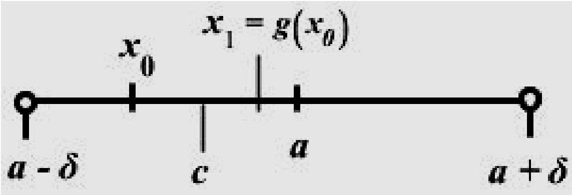
Da $f(a)=0$ og $f'(a) \neq 0$, ser vi, at $\lim\limits_{x \to a} g'(x) = 0$,

da $f(a)=0$ *og* $f'(a) \neq 0$.

Dvs. Hvis vi vælger et tal C, $0 < C < 1$, så findes et $\delta > 0$,

så $|g'(x)| \leq C$ når $x \in \omega(a)$.

Antag nu, at $x_0 \in \omega(a)$. Så er $|x_0 - a| < \delta$.



Lad os lave et overslag over afstanden mellem x_1 og a .

Da $x_1 = g(x_0)$ og $a = g(a)$, har vi

$|x_1 - a| = |g(x_0) - g(a)| = |g'(c)| \cdot |x_0 - a|$ for et tal c mellem x_0 og a .

(Middelværdisætningen: se Appendiks **A3**.)

Da $|g'(c)| \leq C$ og $|x_0 - a| < \delta \Rightarrow |x_1 - a| = |g'(c)| \cdot |x_0 - a| < C \cdot \delta$.

Desuden $|x_2 - a| = |g(x_1) - g(a)| = |g'(c)| \cdot |x_1 - a|$

$$\leq C \cdot |x_1 - a| \leq C \cdot C \cdot \delta = C^2 \cdot \delta \ .$$

dvs. $|x_2 - a| \leq C^2 \cdot \delta$.

Fortsætter vi sådan, ... ser vi at $|x_n - a| \leq C^n \cdot \delta$ og da $C < 1 \Rightarrow$

$|x_n - a| \to 0$ da $C^n \to 0$.

dvs. $\{x_n\}$ konvergerer mod a .

□

A2 Korollar 3

Sætning 2, ovenfor, fortæller os, at hvis betingelserne er opfyldt, vil Newtons metode konvergere, forudsat vi starter tilstrækkelig tæt på et nulpunkt. Hvor tæt på vi skal starte, og hvor hurtigt x_n konvergerer, siger sætningen ikke noget om. Men ser vi nærmere på beviset for sætningen, kan vi imidlertid trække mere information ud:

Fra Beviset for Sætning 2, har vi direkte:

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \quad \text{og} \quad |g'(c)| \leq C \ ,$$

C er valgt som $C < 1$ og det gælder for alle $x \in \omega(a)$.

Hvilket umiddelbart giver:

> **Korollar 3**
>
> Antag, at $f(a) = 0$, at $f'(a) \neq 0$. Antag endvidere, at $\delta > 0$ er valgt sådan, at
>
> $$\frac{|f(x) \cdot f''(x)|}{f'(x)^2} \leq C < 1 \qquad \text{for alle } x \in \omega(a) .$$
>
> Hvis $x_0 \in \omega(a)$, vil $\{x_n\}$ konvergerer mod a , og $|x_n - a| \leq C^n \cdot \delta$.

Dette resultat kan bl.a. bruges til at estimere hvor god nøjagtigheden er, når vi bruger Newtons metode.
Har vi udregnet x_n , ved vi, at nøjagtigheden er bedre end $C^n \cdot \delta$.

I praktiske situationer er det som regel bedre, at bruge tommelfingerreglen vi nævnte tidligere (samme n decimaler to gange i træk).

A3 Middelværdisætningen

Middelværdisætningen

Hvis funktionen f er kontinuert i det lukkede interval $[\,a\,,\,b\,]$ og differentiabel i det tilsvarende åbne interval $]\,a\,,\,b\,[$, så findes der et punkt c i $]\,a\,,\,b\,[$, hvor

$f\,'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ og dermed $f(b) - f(a) = f\,'(c)\cdot(b - a)$

I beviset for sætning 2 , ligger punktet c mellem x_0 og a , dvs. i $\omega(a)$.

Og $\left|\,g(x_0) - g(a)\,\right| = |\,g\,'(c)|\cdot|\,x_0 - a\,|$.