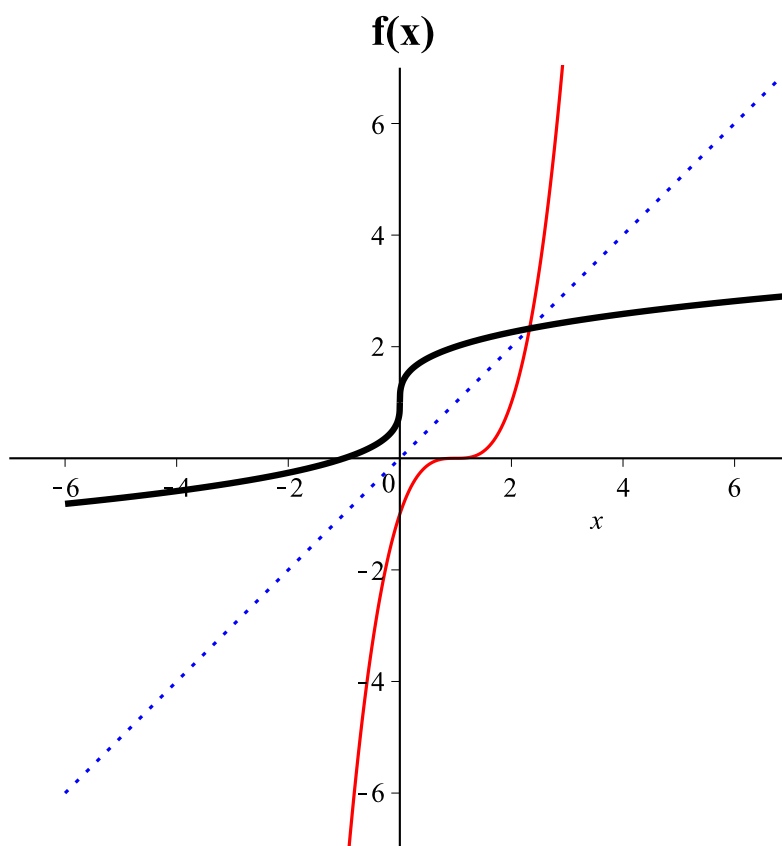


Inverse funktioner

John V Petersen



Indhold

Indledning: Indledende eksempel. Grafen for en funktion. Og grafen for den inverse funktion.		3
Afbildning, funktion og inverse funktion: forklaringer og definitioner		6
Inverse funktioner: Definitioner		7
Inverse funktioner : eks. 2		8
Inverse funktioner: Celsius og Fahrenheit eks. 3		10
Sammensatte funktioner og inverse funktioner		13
Grafen for nogle funktioner og deres inverse		14

Indledning eks. 1

Vi ser på grafen for funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 4$ fig. 1,

Definitionerne for funktion og injektiv funktion, nedenfor, bliver uddybet på efterfølgende sider.

$f(x)$ er en funktion, da grafen for $f(x)$ opfylder lodret-kriteriet: lodrette linier $x = k$, hvor $k \in Dm(f)$, skærer kun grafen i ét punkt. (den grønne linje på fig. 1)

Har $f(x)$ en invers funktion? Hvis funktionen $f(x)$ er injektiv har den en invers funktion f^{-1} .

Hvis grafen for $f(x)$ opfylder vandret-kriteriet er $f(x)$ injektiv.

vandret-kriteriet: enhver vandret linje $y = k$, hvor $k \in Vm(f)$, skærer kun grafen i ét punkt. (den blå linje på fig. 1 og 2.

Det ses, at $f(x)$ på fig. 1, er ikke injektiv. Men $f(x)$ på fig. 2 er injektiv. Her er $Dm(f)$ begrænset til $[1; \infty]$

Eksempel 1

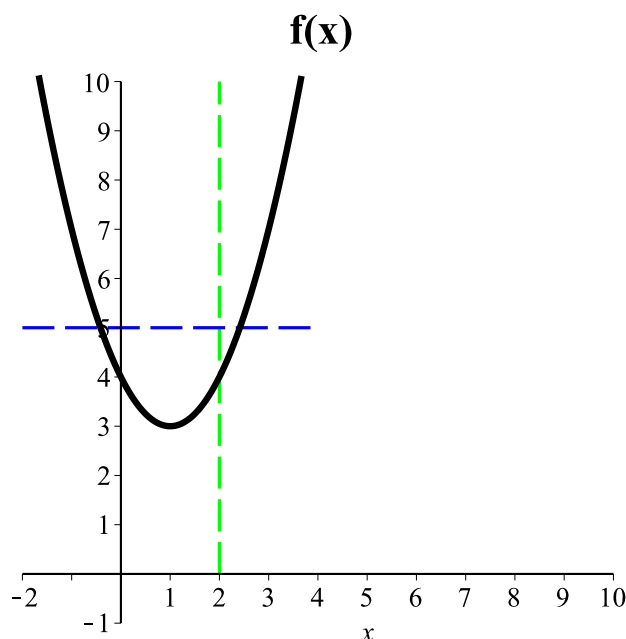


fig. 1

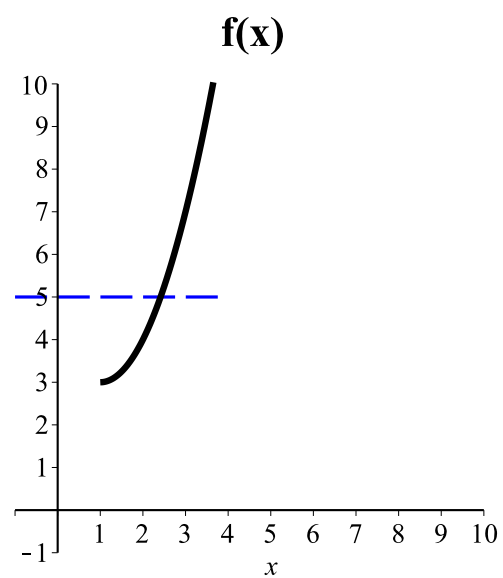


fig. 2

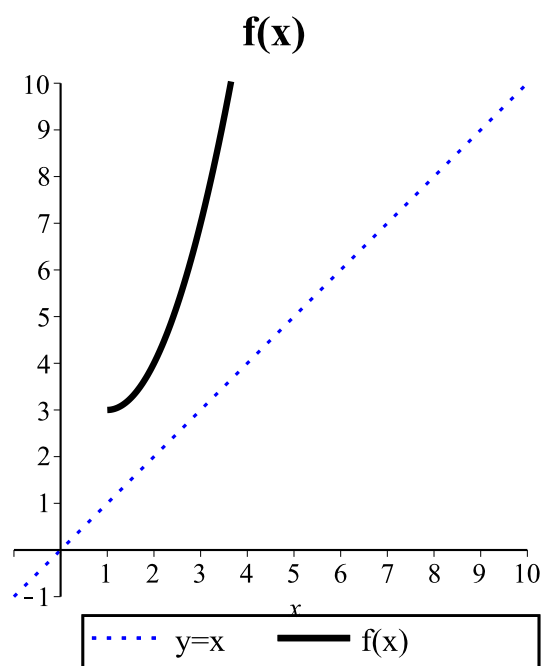


fig. 3

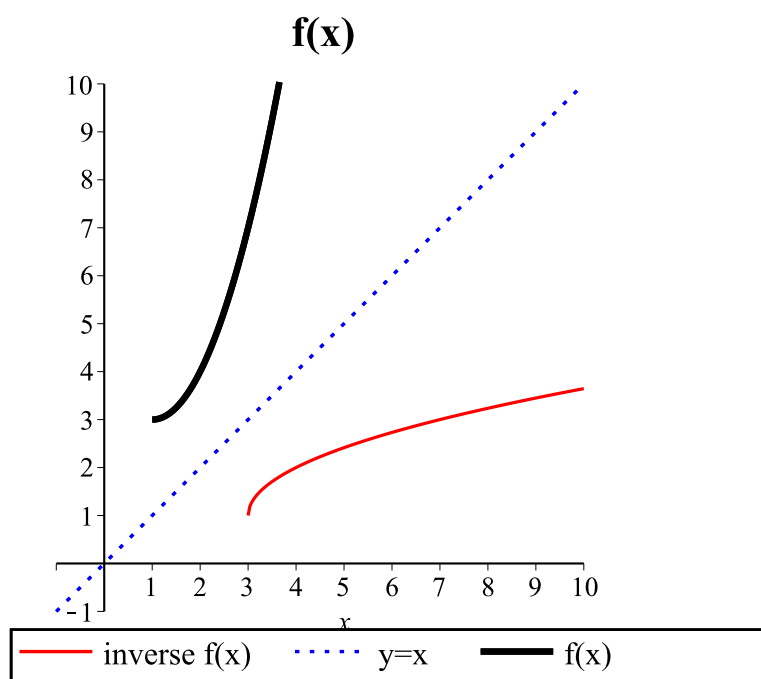


fig. 4

Afbildning og funktion

Hvorfor ser graferne for funktionen i eksemplet side 2, ud som de gør?

Vi vil nu definere den inverse funktion mere præcist. Men først ser vi på definitionen af en funktion.

Definition 1

En størrelse y kaldes *en funktion af x* , hvis der til hver værdi x svarer præcis én værdi af y , som kaldes *funktionsværdien* af x . Man skriver $y = f(x)$.

Den mængde af tal, inden for hvilken den **uafhængige variabel x** kan variere, kaldes funktionens *definitions­mængde*, og den betegnes $Dm(f)$.

Den mængde af tal, der udgøres af samtlige funktionsværdier, kaldes funktionens *værdimængde* og betegnes $Vm(f)$.

Herunder ses grafen for en funktion. Det ses, at hver værdi x , afbildes i netop én værdi af y . Men hvis man fortsætter den stiplede linje, ved værdien $f(x)$, vil man ramme grafen. Så der kan godt være to forskellige x -værdier, der har samme y -værdi.

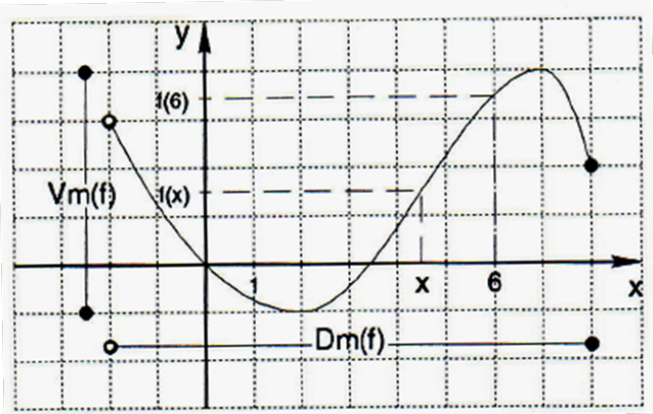


fig. 5

Det ses også illustreret på pilediagrammerne herunder:

fig. 6

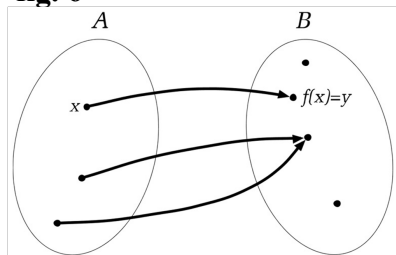
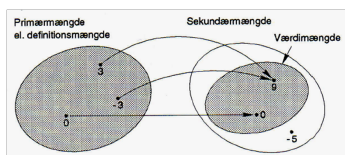


fig. 7



Nu vil vi se på inverse funktioner:

Herunder ses, et pilediagram for funktionen $y=f(x)$ og den inverse funktion $x=f^{-1}(y)$.

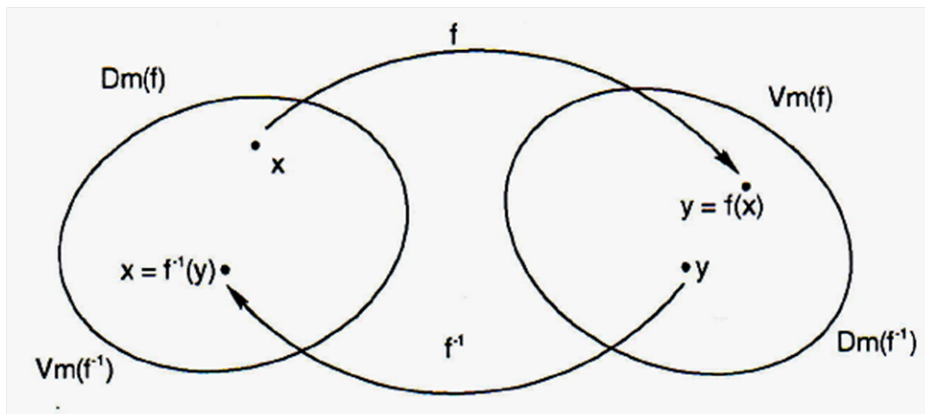


fig. 8

Kriteriet for en funktion er, at én værdi i $Dm(f)$ kun afbildes over i én værdi i $Vm(f)$. Derfor er kriteriet for f^{-1} , at én værdi i $Vm(f)$ kun afbildes over i én værdi i $Dm(f)$.

Derfor kræves der, at en funktion $y=f(x)$ er injektiv, for at den har en invers funktion.

En funktion $f(x)$ kaldes injektiv, hvis $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Eller mere præcist udtrykt:

Definition 2. En funktion $f(x)$ kaldes injektiv, hvis implikationen

$\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ er sand.

(for ethvert x_1, x_2 tilhørende definitionsmængden for f gælder der, at x_1 forskellig fra x_2 medfører at $f(x_1)$ er forskellig fra $f(x_2)$)

Bemærkning 1

For en **voksende funktion** gælder der : **$\forall x_1, x_2 \in Dm(f) :$**

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

dvs. der gælder følgende :

Korollar 1 (følgesætning)

Af Bemærkning 1, følger : En voksende funktion er injektiv .

Nu kan vi definere den inverse funktion:

Definition 2

Hvis funktionen f er *injektiv*, defineres den inverse funktion f^{-1} , ved:

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

Og der gælder: $Dm(f^{-1}) = Vm(f)$ og $Vm(f^{-1}) = Dm(f)$

I det indledende eksempel 1, med funktionen

$f(x) = x^2 - 2x + 4$, ses det på fig. 1 - fig. 2, at vi måtte udvælge en del af $Dm(f)$, for at kunne afbilde grafen for f^{-1} .

Her valgte vi netop $Dm(f)$ så $f(x)$ var injektiv.

Bemærkning 2

Den inverse funktion vender retningen men ændrer ikke sammenhængen.

Vi vil nu se på nogle eksempler:

Forskriften for f^{-1}

Hvis den injektive funktion f har en "tilstrækkelig pæn" regneforskrift, funktionsudtryk kan man finde et funktionsudtryk for den inverse funktion.

I funktionsudtrykket for f er y udtrykt ved x . I et funktionsudtryk for den inverse funktion f^{-1} må vi så omvendt udtrykke x ved y .

Eksempel 2

Lad funktionen f have regneforskriften

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

Denne funktion er voksende, og dermed injektiv (Korollar 1). Vi vælger som definitionsmængde $Dm(f) = [-4, 4]$, så værdimængden bliver $Vm(f) = [1, 5]$, se fig. 9.

Vi ønsker at finde det tal på x -aksen, der svarer til tallet y på y -aksen.

Vi isolerer x ved at skrive om på ligningen for grafen for f :

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x = y - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y - 6.$$

Dermed har vi bestemt forskriften for den inverse funktion:

$$f^{-1}(y) = 2y - 6. \quad (1)$$

På fig. 9 kan vi således se, at

$$f^{-1}(4) = 2 \quad , \quad f^{-1}(2) = -2 \quad , \quad f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = -3 \quad .$$

Disse tal passer (selvfølgelig) med forskriften, fordi f.eks.

$$f^{-1}(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2 \quad , \quad f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} - 6 = -3 \quad .$$

Forskriften **(1)** bruger y som uafhængig variabel, fordi vi jo begynder med at vælge en værdi på y -aksen, hvor $1 \leq y \leq 5$.

Grafen for $f^{-1}(y)$ er jo stadig identisk med grafen for $f(x)$, hvor vi nu har $Dm(f^{-1})$ på y -aksen og $Vm(f^{-1})$ på x -aksen.

Imidlertid foretrækker man traditionelt x som navn på den uafhængige variabel. Så vi skriver forskriften for den omvendte funktion sådan:

$$f^{-1}(x) = 2x - 6 \quad , \quad 1 \leq x \leq 5 \quad .$$

Denne funktion har definitionsmængden $[1, 5]$ og værdimængden $[-4, 4]$.

På fig. 9 er desuden tegnet, grafen (med rødt) for den omvendte funktion

$$f^{-1}(x) = 2x - 6 \quad .$$

Grafen for $f^{-1}(x)$ fås ved at spejle grafen for $f(x)$ i linjen $y=x$ (den blå graf).

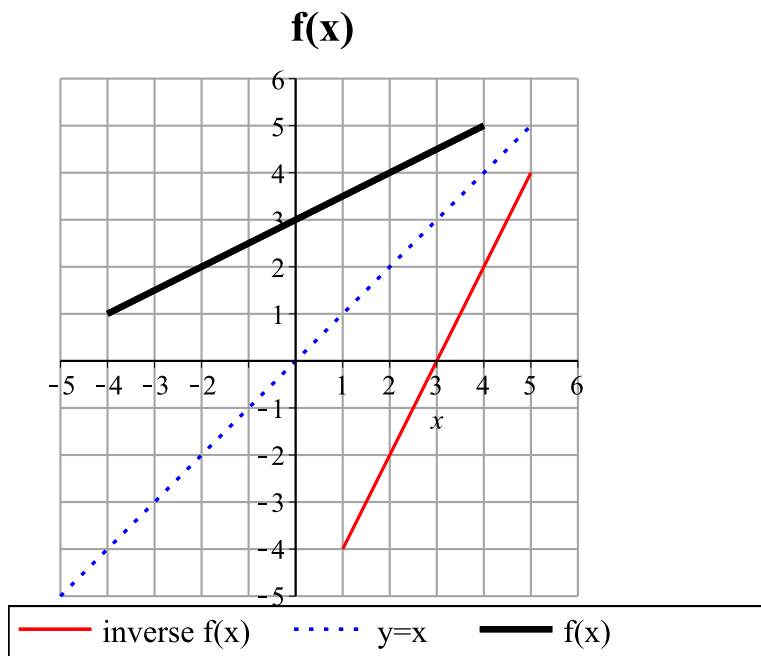


fig. 9

Husk, at der gælder:

Definitions- og Værdimængde, for en injektiv funktion og dens inverse, bytter roller:

$$Dm(f^{-1}) = Vm(f) \quad \text{og} \quad Vm(f^{-1}) = Dm(f)$$

Grafmæssigt (se fig. 8 og 9) kan det formuleres sådan:

En funktion og dens inverse har grafer, der er hinandens spejlbilleder i linjen $y = x$.

Eksempel 3

Her er et konkret eksempel, som viser at man skal huske at se på betydningen af x og y -værdierne i de konkrete tilfælde hvor inverse funktioner findes og bruges:

Sammenhængen mellem Celsius- og Fahrenheit grader:

Sammenhængen mellem Celsius- og Fahrenheit grader kan udtrykkes ved denne funktionsforskrift, hvor y betegner Fahrenheit og x betegner Celsius:

$$f(x) = y = \frac{9}{5}x + 32 \quad (2)$$

Denne forskrift fås, da vi har to kendte (x, y) -værdier: $(x, y) = (0, 32)$ og $(x, y) = (100, 212)$, som er værdierne for henholdsvis frysepunktet og kogepunktet for vand.

dvs vi har ligningerne

$$(y = a \cdot x + b), \quad 32 = a \cdot 0 + b \quad \wedge \quad 212 = a \cdot 100 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 32 \quad \wedge \quad 212 = a \cdot 100 + 32$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 32 \quad \wedge \quad a = \frac{212 - 32}{100} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}.$$

$$\text{dvs. } y = \frac{9}{5}x + 32. \quad \left(f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \right),$$

Vi vælger $Dm(f) = [-60, 120]$ så bliver $Vm(f) = [-76, 248]$.

Det er forskriften for en funktion, som afbilder Fahrenheit grader som funktion af Celsius grader:

Nu vil vi finde den inverse funktion $f^{-1}(y)$, som afbilder Celsius som funktion af Fahrenheit.

Grafen for $f^{-1}(y)$ er jo stadig identisk med grafen for $f(x)$, hvor vi nu blot har $Dm(f^{-1})$ på y -aksen og $Vm(f^{-1})$ på x -aksen.

Vi finder funktionudtrykket for $f^{-1}(y)$ ved at isolere x i (2):

$$y = \frac{9}{5}x + 32 \quad \Leftrightarrow \quad y - 32 = \frac{9}{5}x \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 5y - 160$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9} \quad f^{-1}(y) = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9} \quad (3)$$

I tabellen har vi værdier for funktionerne $f(x)$ og $f^{-1}(y)$:

x	-60	-40	20	100	120	$f^{-1}(y)$
$f(x)$	-76	-40	68	212	248	y

Givne værdier for Celsius grader og sammenhørende værdier for Fahrenheit grader, får vi ved at læse fra øverste række og ned.

Og givne værdier for Fahrenheit grader og sammenhørende værdier for Celsius grader, får vi ved at læse fra nederste række og op.

Dvs. øverste række betegner værdier på x -aksen og nederste række betegner værdier på y -aksen.

Vi vil afbilde grafen for f^{-1} . Derfor foretager vi variabelbytte i (3), og får

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} \quad (4)$$

$$Dm(f^{-1}) = [-76, 248] \quad \text{og} \quad Vm(f^{-1}) = [-60, 120] .$$

Bemærk, at x nu betegner Fahrenheit temperaturer og y Celsius,

$$\text{da } Dm(f^{-1}) = Vm(f) \quad \text{og} \quad Vm(f^{-1}) = Dm(f).$$

På fig. 10 og 11 ses graferne for $f(x)$ og $f^{-1}(x)$.

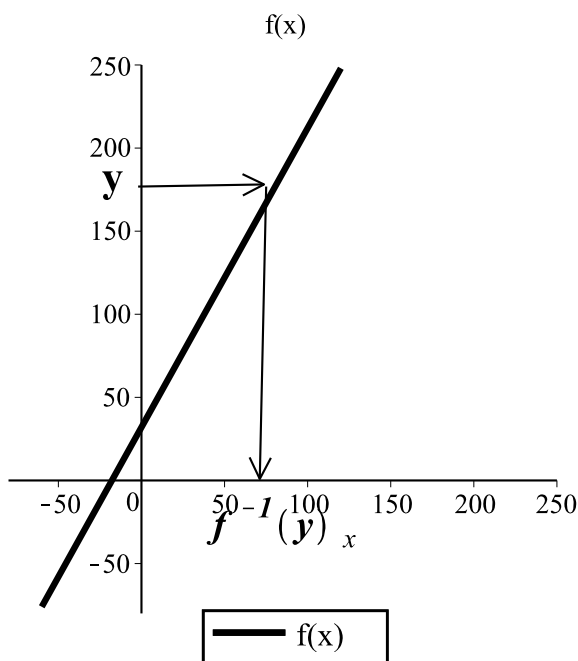


fig. 10

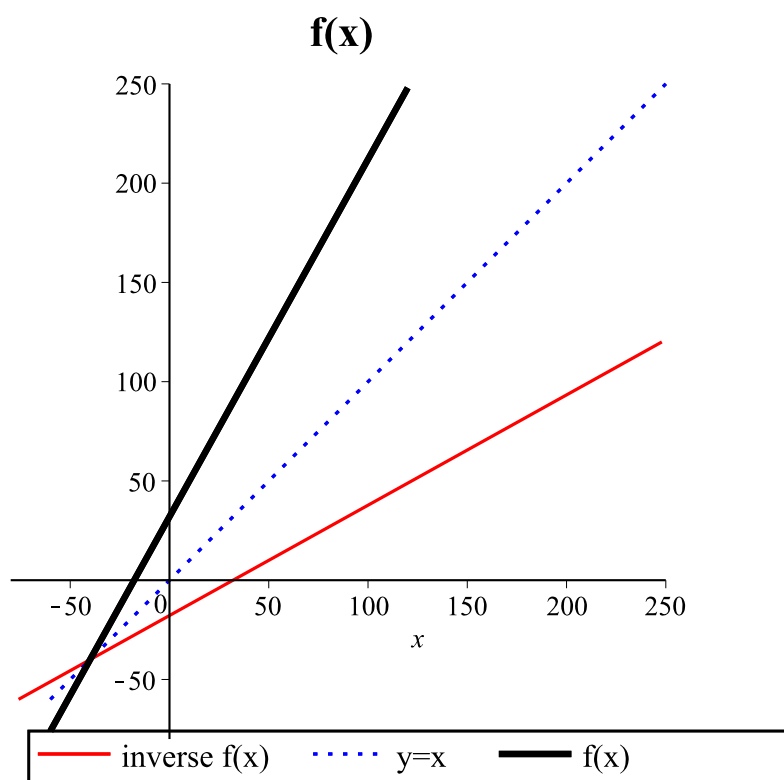


fig. 11

Ved sammensætning af funktioner $f(g(x))$ vil man, hvis f og g er hinandens inverse, få den identiske afbildning: $x \rightsquigarrow x$. Dvs. at funktionerne i en vis forstand "ophæver" hinanden. Det kan være nyttigt ved udregninger, løsning af ligninger etc.

Definition 3 Sammensætning af funktioner

Ved den **sammensatte** funktion $f \circ g$ (f bolle g) forstås den funktion, der til et $x \in Dm(g)$ lader svare tallet $f(g(x))$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) ,$$

hvor $g(x) \in Dm(f)$.

Et par eksempler på sammensatte funktioner:

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 . \quad \text{Den sammensatte funktion} \quad f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 \quad \text{og} \quad g(x) = 2x - 6 . \quad \text{Den sammensatte funktion}$$

$$f(g(x)) = f(2x - 6) = \frac{1}{2} (2x - 6)^2 = \frac{1}{2} (4x^2 - 24x + 36) = 2x^2 - 12x + 18 .$$

Nu sammensætter vi funktioner og deres inverse funktioner:

Den naturlige logaritmefunktion $\ln(x)$, og den naturlige eksponentialfunktion

med grundtal e^x , $\exp(x) = e^x$: $\ln(e^x) = x$

Titals logaritmefunktion $\log(x)$, og eksponentialfunktion med grundtal 10: $\log(10^x) = x$

Kvadratrodsfunktionen og andengradsfunktionen: $\sqrt{x^2} = x$

De trigonometriske funktioner Sinus og Cosinus, og deres inverse $\sin^{-1}$ og $\cos^{-1}$: $\sin^{-1}$

$(\sin(x)) = x$ (vinklen) . $\cos^{-1}(\cos(x)) = x$ (vinklen) .

Man kan nemt definere nye funktioner:

eks. kan logaritmefunktionen defineres som den inverse til eksponentialfunktionen (og omvendt)

Fig. 12 - 15, viser graferne for nogle funktioner og deres inverse:

$$x^2 \text{ og } \sqrt{x}$$

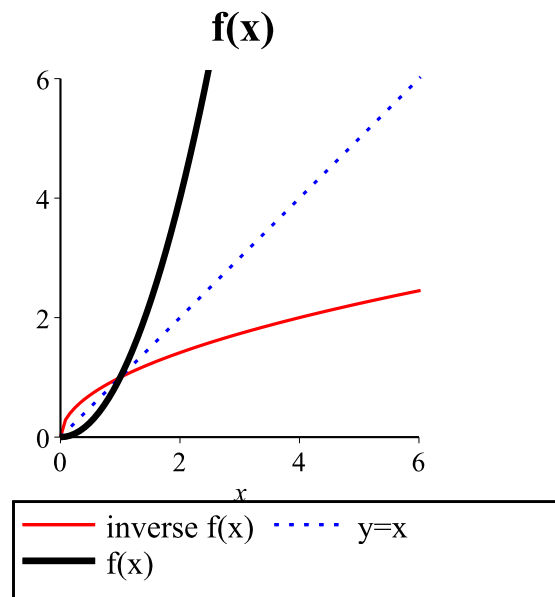


fig. 12

$$e^x \text{ og } \ln(x)$$

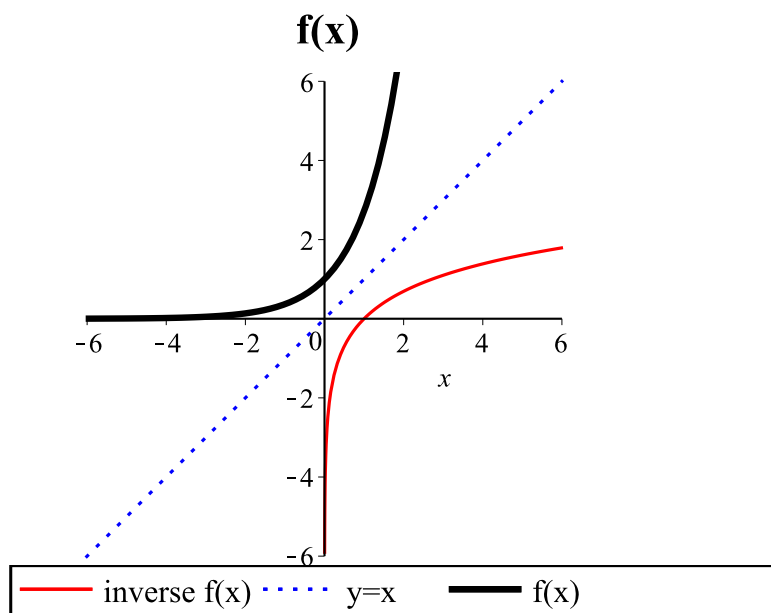


fig. 13

$\tan(x)$ og $\arctan(x)$

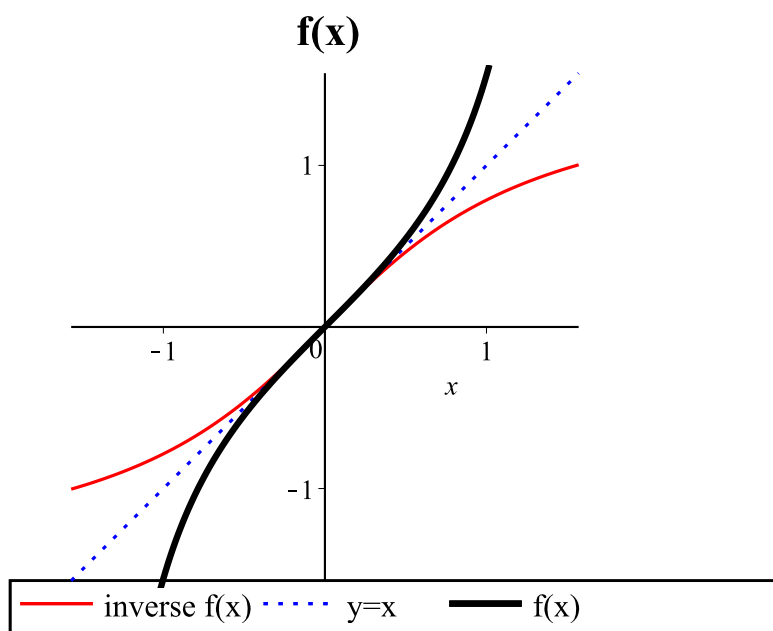


fig. 14

$\frac{2x-2}{3+x}$ og $\frac{3x+2}{2-x}$

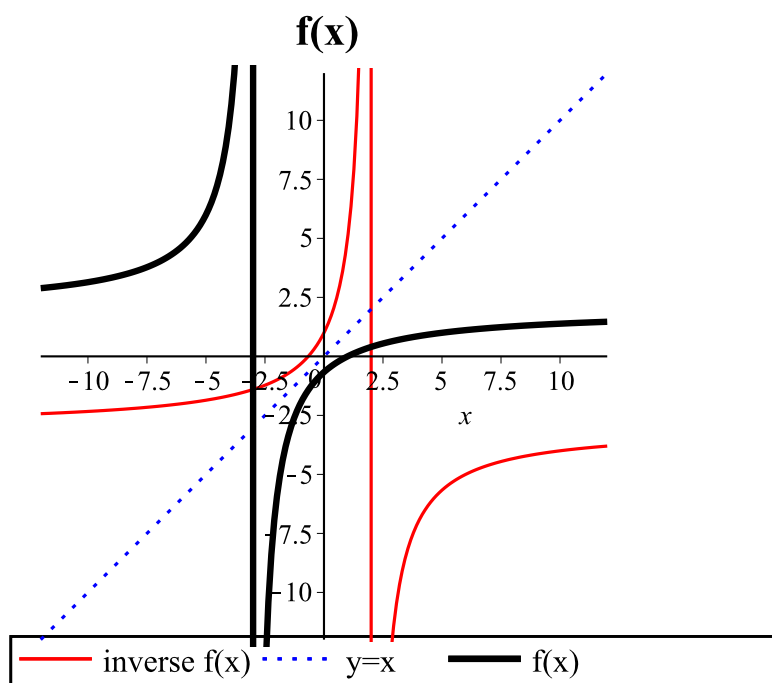


fig. 15