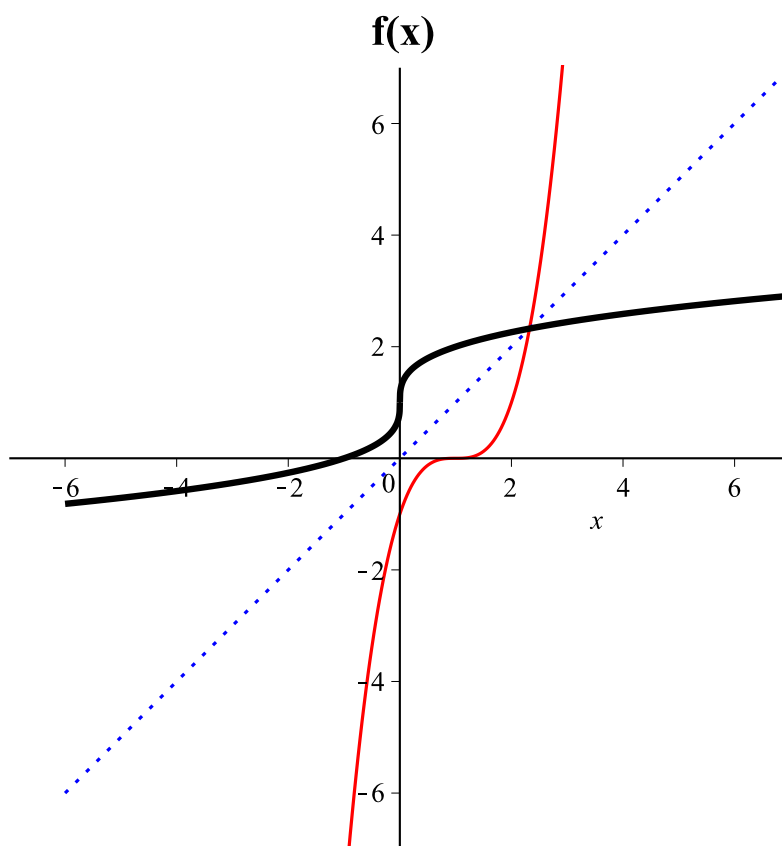


Inverse funktioner

John V Petersen



Indhold

Indledning: Indledende eksempel. Grafen for en funktion. Og grafen for den inverse funktion.		3
Afbildning, funktion og inverse funktion: forklaringer og definitioner		6
Inverse funktioner: Definitioner		7
Inverse funktioner : eks. 2		8
Inverse funktioner: Celsius og Fahrenheit eks. 3		10
Sammensatte funktioner og inverse funktioner		13
Grafen for nogle funktioner og deres inverse		14

Indledning eks. 1

Vi ser på grafen for funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 4$ fig. 1,

Definitionerne for funktion og injektiv funktion, nedenfor, bliver uddybet på efterfølgende sider.

$f(x)$ er en funktion, da grafen for $f(x)$ opfylder lodret-kriteriet: lodrette linier $x = k$, hvor $k \in Dm(f)$, skærer kun grafen i ét punkt. (den grønne linje på fig. 1)

Har $f(x)$ en invers funktion? Hvis funktionen $f(x)$ er injektiv har den en invers funktion f^{-1} .

Hvis grafen for $f(x)$ opfylder vandret-kriteriet er $f(x)$ injektiv.

vandret-kriteriet: enhver vandret linje $y = k$, hvor $k \in Vm(f)$, skærer kun grafen i ét punkt. (den blå linje på fig. 1 og 2.

Det ses, at $f(x)$ på fig. 1, er ikke injektiv. Men $f(x)$ på fig. 2 er injektiv. Her er $Dm(f)$ begrænset til $[1; \infty]$

Eksempel 1

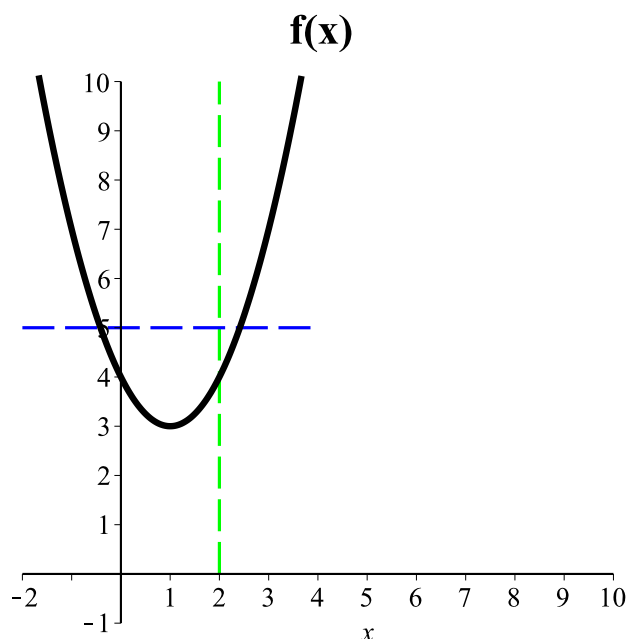


fig. 1

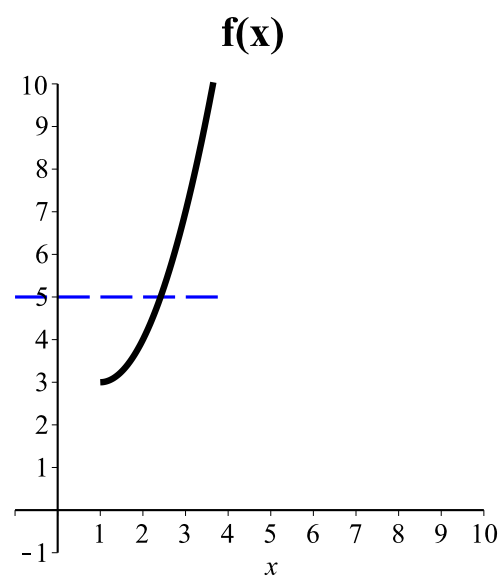


fig. 2

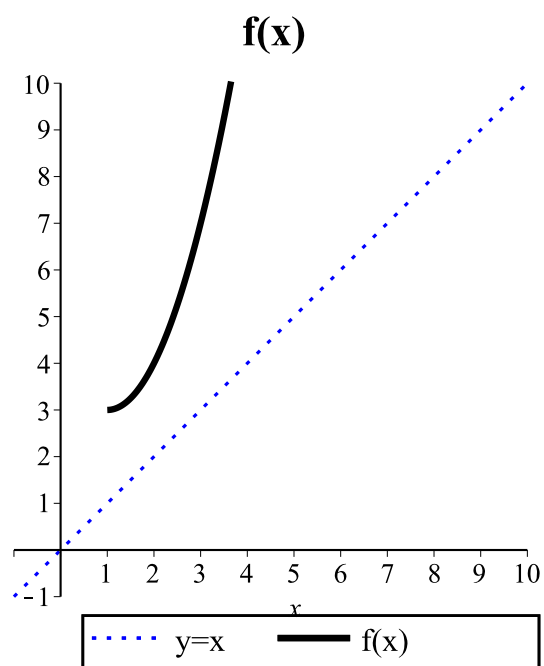


fig. 3

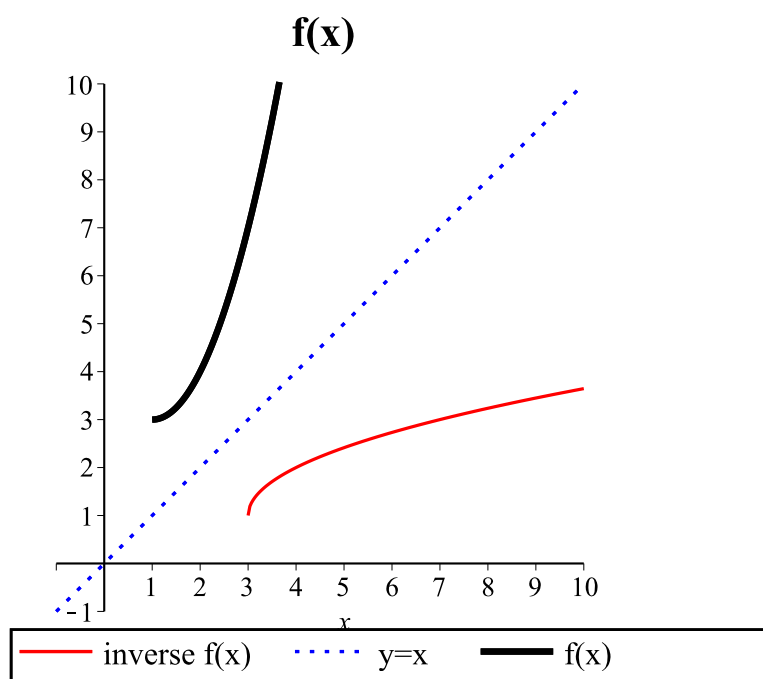


fig. 4

Afbildning og funktion

Hvorfor ser graferne for funktionen i eksemplet side 2, ud som de gør?

Vi vil nu definere den inverse funktion mere præcist. Men først ser vi på definitionen af en funktion.

Definition 1

En størrelse y kaldes *en funktion af x* , hvis der til hver værdi x svarer præcis én værdi af y , som kaldes *funktionsværdien* af x . Man skriver $y = f(x)$.

Den mængde af tal, inden for hvilken den **uafhængige variabel x** kan variere, kaldes funktionens *definitions­mængde*, og den betegnes $Dm(f)$.

Den mængde af tal, der udgøres af samtlige funktionsværdier, kaldes funktionens *værdimængde* og betegnes $Vm(f)$.

Herunder ses grafen for en funktion. Det ses, at hver værdi x , afbildes i netop én værdi af y . Men hvis man fortsætter den stiplede linje, ved værdien $f(x)$, vil man ramme grafen. Så der kan godt være to forskellige x -værdier, der har samme y -værdi.

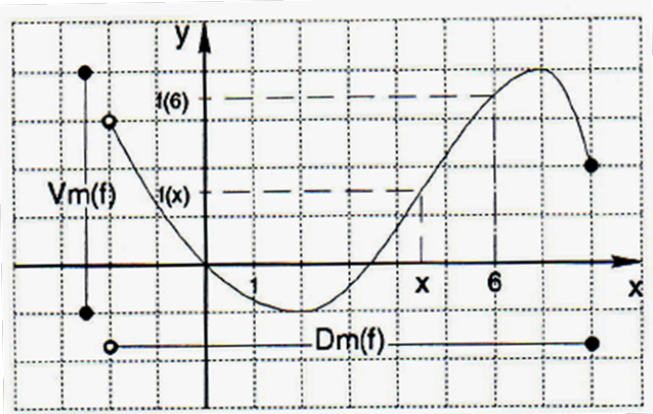


fig. 5

Det ses også illustreret på pilediagrammerne herunder:

fig. 6

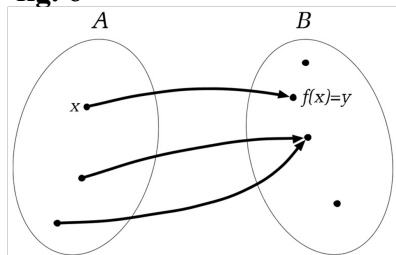
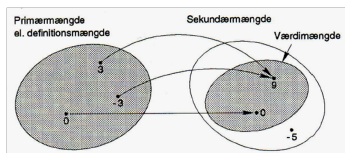


fig. 7



Nu vil vi se på inverse funktioner:

Herunder ses, et pilediagram for funktionen $y=f(x)$ og den inverse funktion $x=f^{-1}(y)$.

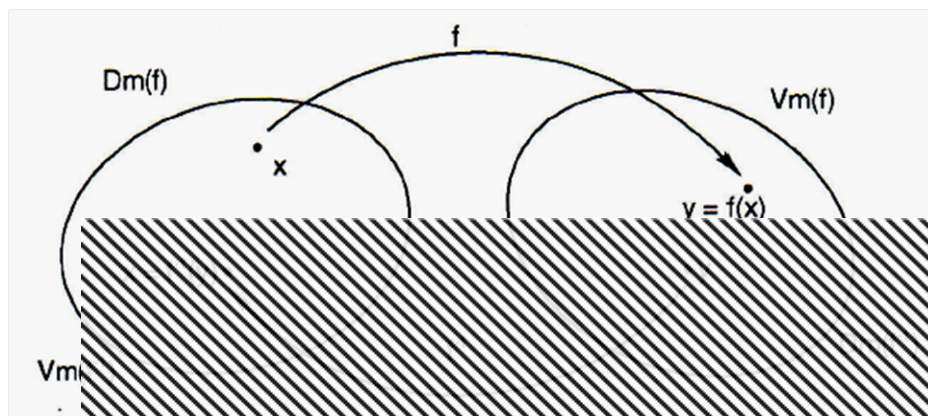


fig. 8

Kriter

Derfo

Derfo

En fu

Eller

Def

$\forall x$

(for

med

2

Bem

For

$x_1 <$

dvs. der gælder følgende:

Korollar 1 (følgesætning)

Af Bemærkning 1, følger: *En voksende funktion er injektiv.*

Nu kan vi definere den inverse funktion:

Definition 2

Hvis funktionen f er *injektiv*, defineres den inverse funktion f^{-1} , ved:

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

Og der gælder: $Dm(f^{-1}) = Vm(f)$ og $Vm(f^{-1}) = Dm(f)$

I det i

$f(x) =$

afbild

Her v

kunne

Bemærk

Den

Vi vil

Forsk

Hvis o

finde

I fun

f^{-1} m

i man

1

Eksam

Lad f

Denne

defini

Vi øn

Vi isc

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x = y - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y - 6.$$

Dermed har vi bestemt forskriften for den inverse funktion:

$$f^{-1}(y) = 2y - 6. \quad (1)$$

På fig. 9 kan vi således se, at

$$f^{-1}(4) = 2 \quad , \quad f^{-1}(2) = -2 \quad , \quad f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = -3 \quad .$$

Disse tal passer (selvfølgelig) med forskriften, fordi f.eks.

$$f^{-1}(4) = 2 \cdot 4 - 6 = 2 \quad , \quad f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} - 6 = -3 \quad .$$

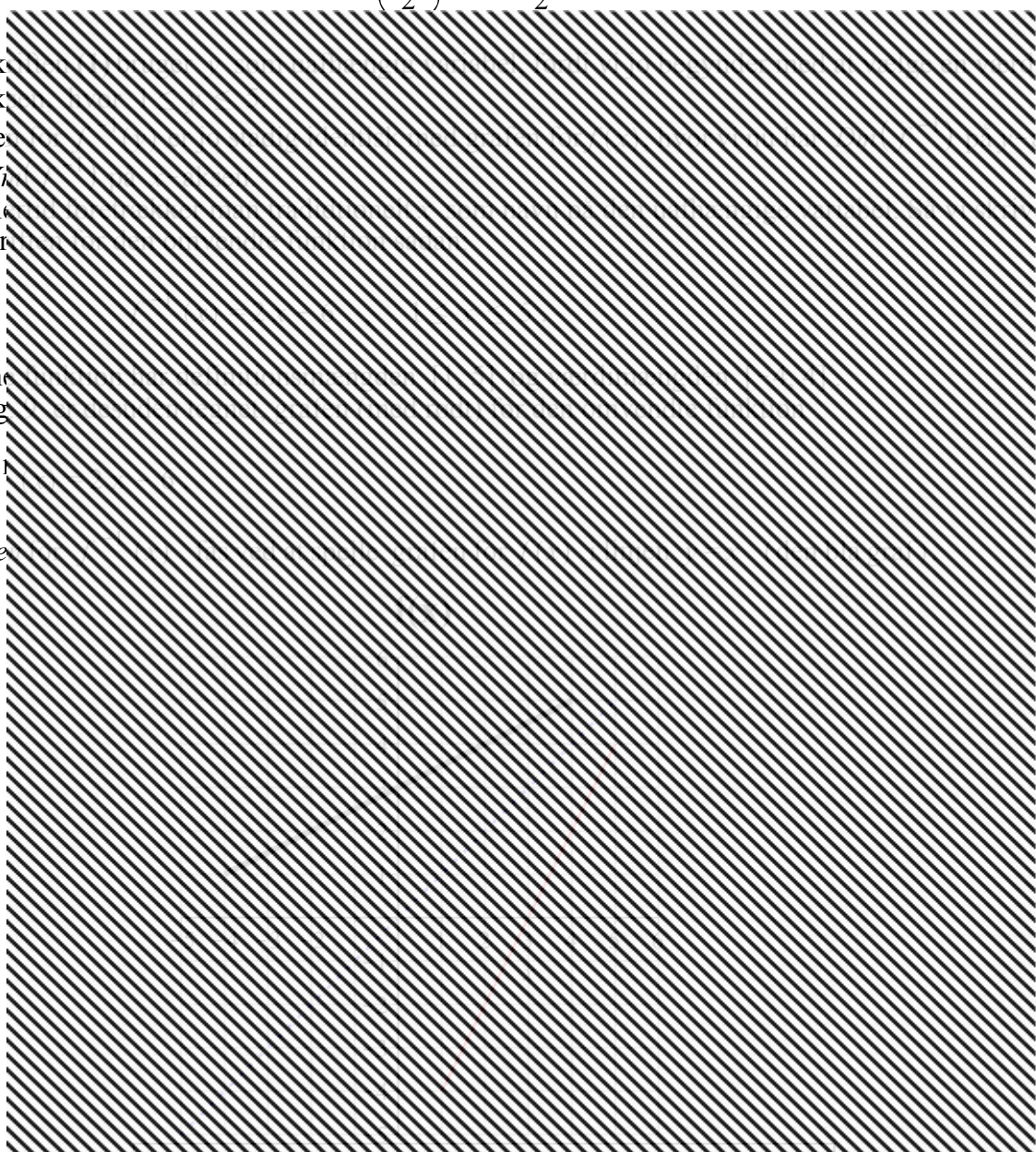
Forsk
y-ak
Grafe
og V_f
Imidl
forskr

på
ksen
r

Denne
På fig

f^{-1}

Grafe



inverse $f(x)$ $y=x$ $f(x)$

fig. 9

Husk, at der gælder:

Definitions- og Værdimængde, for en injektiv funktion og dens inverse, bytter roller:

$$Dm(f^{-1}) = Vm(f) \quad \text{og} \quad Vm(f^{-1}) = Dm(f)$$

Grafmæssigt (se fig. 8 og 9) kan det formuleres sådan:

En funktion og dens inverse har grafer, der er hinandens spejlbilleder i linjen $y=x$.

Ekse

Her er
de kon

Samn

Samn
hvor y

Denne
som e

dvs vi
($y=a$

$\Leftrightarrow$

dvs

Vi væ

Det er

Nu vi

Grafen

$f(x)$,

dierne i

skrift,

212),

ader:

it.

Vi finder funktionudtrykket for $f^{-1}(y)$ ved at isolere x i (2) :

$$y = \frac{9}{5}x + 32 \quad \Leftrightarrow \quad y - 32 = \frac{9}{5}x \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 5y - 160$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9} \quad f^{-1}(y) = \frac{5}{9}y - \frac{160}{9} \quad (3)$$

I tabellen har vi værdier for funktionerne $f(x)$ og $f^{-1}(y)$:

x	-60	-40	20	100	120	$f^{-1}(y)$
$f(x)$	-76	-40	68	212	248	y

Givne værdier for Celsius grader og sammenhørende værdier for Fahrenheit grader, får vi ved at læse fra øverste række og ned.
Og givne værdier for Fahrenheit grader og sammenhørende værdier for Celsius grader, får vi ved at læse fra nederste række og op.

Dvs. $f^{-1}(y)$ er på den horisontale x-aksen.

Vi vil

$Dm(f)$

Bemærk

da D

På fig

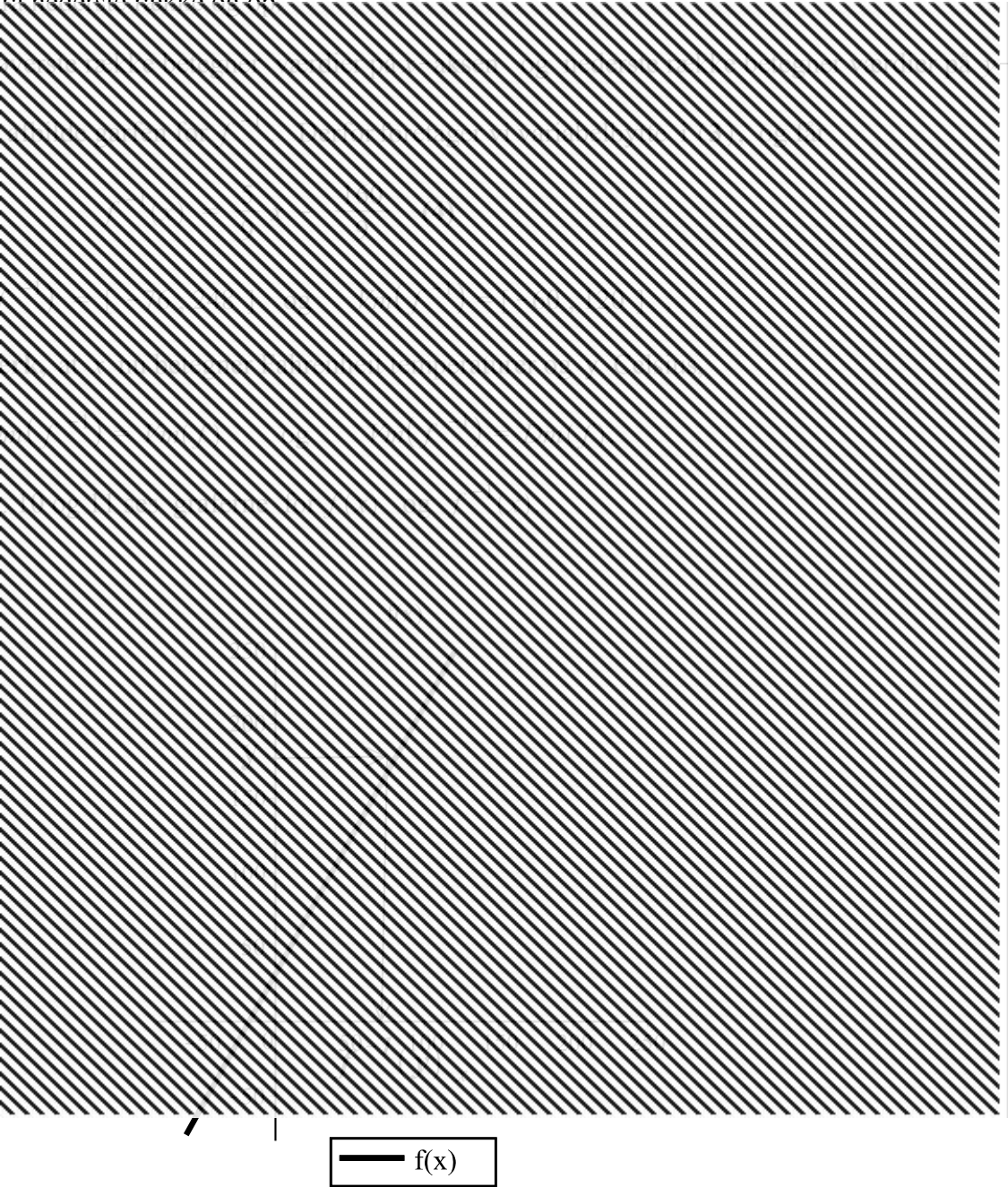


fig. 10

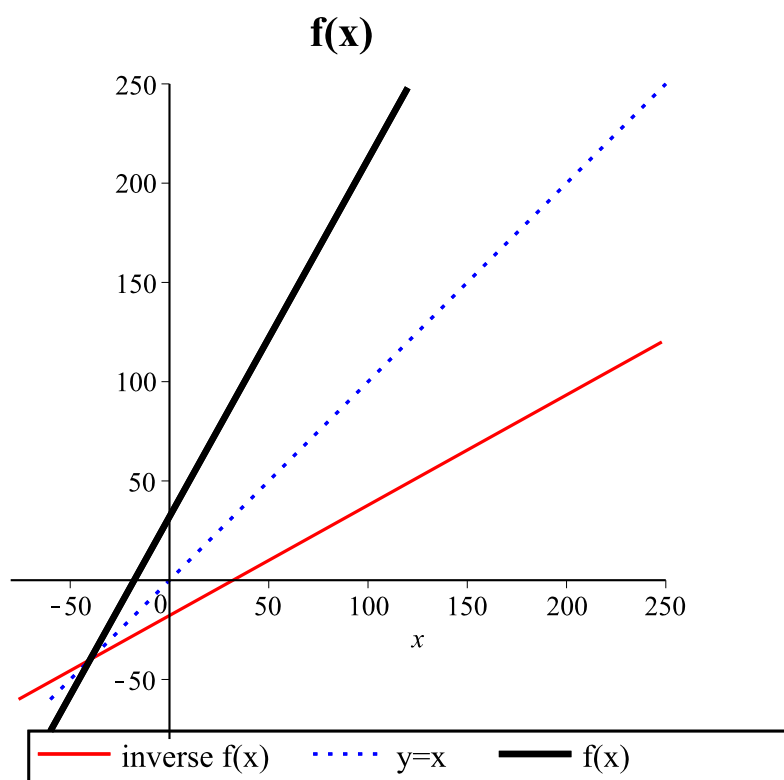


fig. 11

Ved sammensætning af funktioner $f(g(x))$ vil man, hvis f og g er hinandens inverse, få den identiske afbildning: $x \mapsto x$. Dvs. at funktionerne i en vis forstand "ophæver" hinanden. Det kan være nyttigt ved udregninger, løsning af ligninger etc.

Definition 3 Sammensætning af funktioner

Ved den sammensatte funktion $f \circ g$ (f hallee g) forstås den funktion, der til et $x \in Dm(g)$

lader

h

Et på

$f(x)$

$^2)$

$f(x)$

$f(g(x))$

Nu så

Den r

med

Titals

Kvad

De tr

(Sin(

Man

eks. l

ndt)

Fig. 1

$$x^2 \text{ og } \sqrt{x}$$

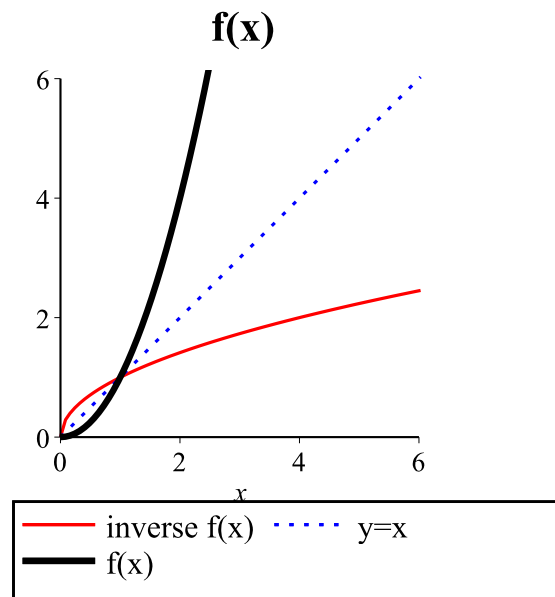


fig. 12

$$e^x \text{ og } \ln(x)$$

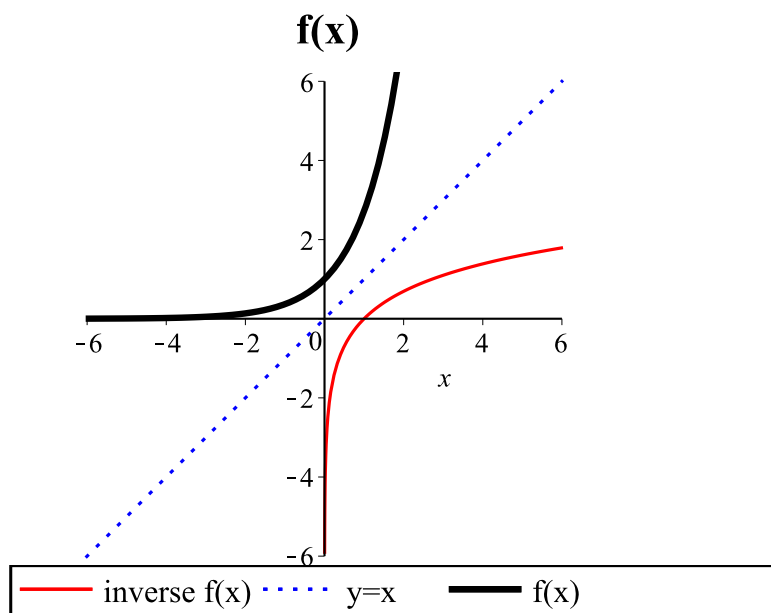


fig. 13

$\tan(x)$ og $\arctan(x)$

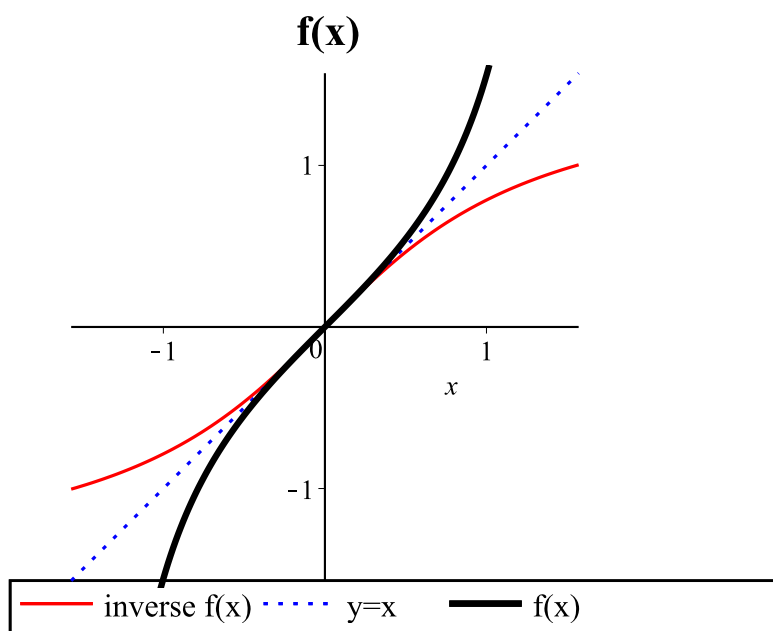


fig. 14

$\frac{2x-2}{3+x}$ og $\frac{3x+2}{2-x}$

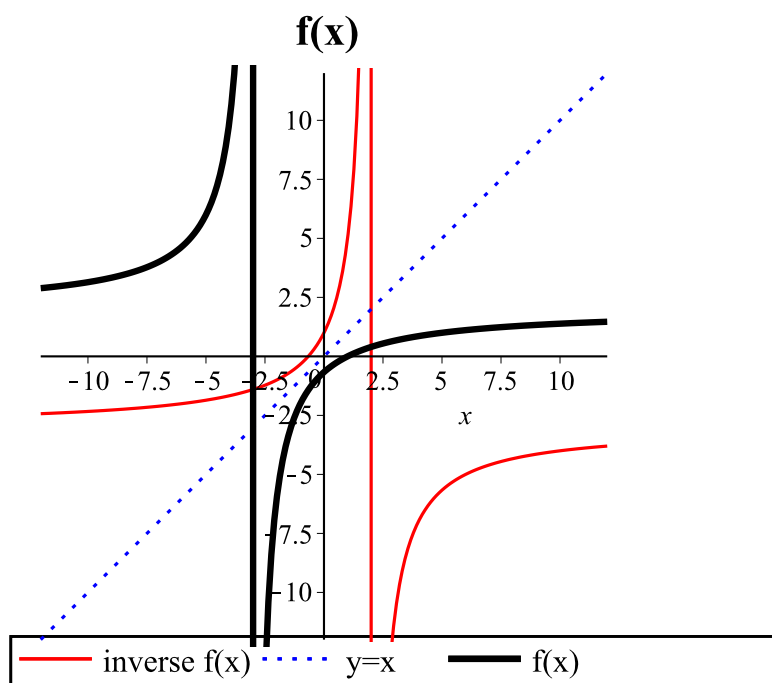


fig. 15