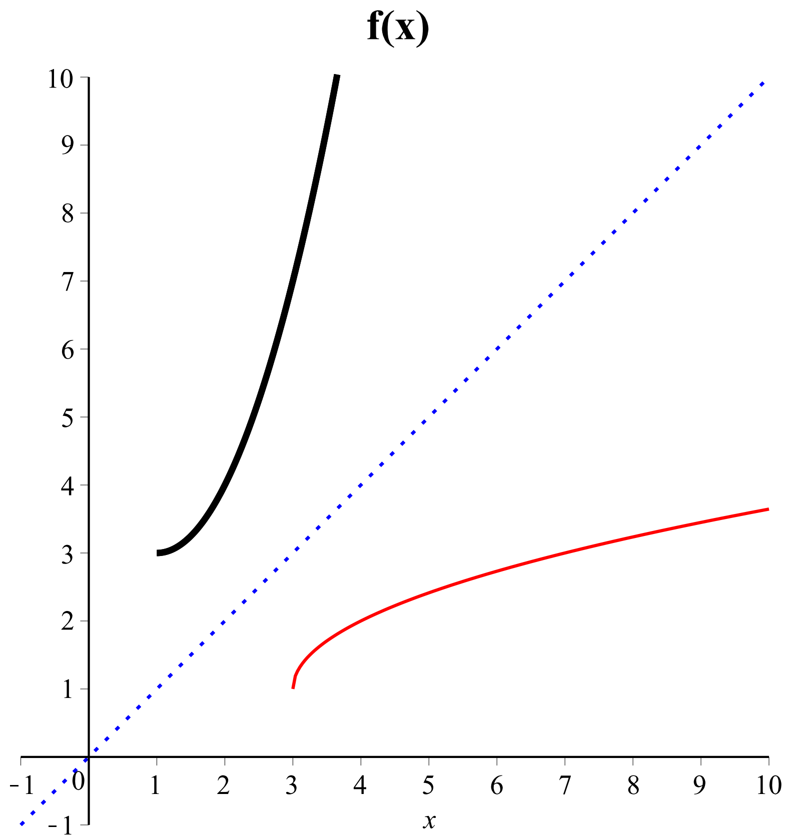
Finde invers funktion til en 2-gradsfunktion - ved parallelforskydning

John V Petersen



$$y = \sqrt{\frac{x - \beta}{a}} + \alpha$$

Finde invers funktion til en 2-gradsfunktion - ved parallelforskydning

art-science-soul

Indhold

Vi vil finde den omvendte funktion til funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 4$, $y = x^2 - 2x + 4$
fra artiklen ovenfor: Inverse funktioner , side 3. (I denne artikel kan man se definitioner, sætninger etc. angående inverse funktioner).

I funktionsudtrykket $y = x^2 - 2x + 4$, skal vi isolere x.

Vi vil lige analysere problemet lidt, og derefter komme med en hurtig metode at løse lignende problemer på.

Det ser jo lidt svært ud, at isolere x ligningen $y = x^2 - 2x + 4$. Men vi kan måske få lidt hjælp, hvis vi kigger på grafen for funktionen (fig. 1).

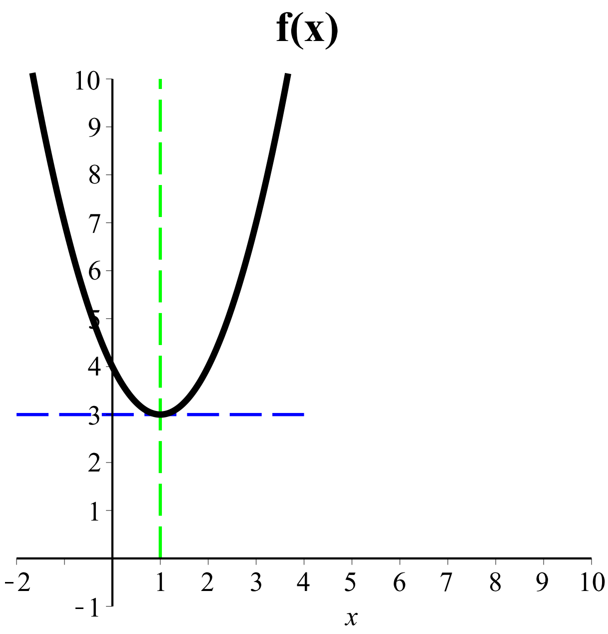


fig. 1

Det ser ud til, at grafen har toppunkt i $(x, y) = (1, 3)$

Vi regner lige efter:

$$(x, y) = \left(-\frac{b}{2 \cdot a}, -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}\right) = \left(-\frac{(-2)}{2 \cdot 1}, -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1}\right) = \left(1, -\frac{(-12)}{4}\right) = (1, 3).$$

Nu omskriver vi udtrykket lidt:

$y = x^2 - 2x + 4 \quad \Leftrightarrow$

$y = (x-1)^2 - 1 + 4 \quad \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$,

Vi har $+1$ for meget på højre side.
Derfor lægger vi -1 til her.

$y = (x-1)^2 + 3$

$y = (x-1)^2 + 3$ er netop udtrykket for funktionen $y = x^2$ med toppunkt i $(0\,,0)$, parallelforskudt så grafen har toppunkt i $(3\,,1)$. En sætning som viser dette, kommer senere.

Men så kan vi jo se på $y = \mathrm{x}^2$ som er noget enklere. Vi skal lige huske på :
for at funktionen har en invers, skal den være injektiv. For at funktionen $y = x^2 - 2\mathrm{x} + 4$ er injektiv, skal $\mathrm{x} \geq 1$ og $\mathrm{y} \geq 3$, den højre gren af parablen. (eller $\mathrm{x} \leq 1 \ \wedge \ \mathrm{y} \leq 3$, den venstre gren).

Dvs. vi ser kun på den højre "gren" af grafen for $f(x)$.
For funktionen $y = x^2$ gælder der, at $x \geq 0$ og $\mathrm{y} \geq 0$. (*Se fig. 2*)

Vi finder så, at $y = x^2 \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt{y} \ \vee \ \left(x = -\sqrt{y}\right)$. $x = \sqrt{y}$ er den inverse funktion.

Så kan vi bytte variable. $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ (*Se fig.* 2)

Så parallelforskyder vi grafen for $\mathrm{y} = x^2$ med $(x\,,y) = (1\,,3)$ og får
$f(x) = x^2 - 2\mathrm{x} + 4$ (som vi startede med).

Nu skal vi også parellelforskyde grafen for $y = \sqrt{x}$.

Men da der gælder, at $\boldsymbol{Dm}\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right) = \boldsymbol{Vm}(\boldsymbol{f})$ og $\boldsymbol{Vm}\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right) = \boldsymbol{Dm}(\boldsymbol{f})$,

skal $y = \sqrt{x}$ parallelforskydes med $(x\,,y) = (3\,,1)$.

Så $f^{-1}(x) = \sqrt{x-3} + 1$. (*Se fig.* 2)

Man kan prøve, om en funden invers funktion er den rigtige, ved at sammensætte f og f^{-1} :

$f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

$f\left(f^{-1}(x)\right) = \left(\sqrt{x-3} + 1\right)^2 - 2\cdot\left(\sqrt{x-3} + 1\right) + 4 =$

$(x-3) + 2\cdot\sqrt{x-3} + 1 - 2\cdot\sqrt{x-3} - 2 + 4 = x - 3 + 1 - 2 + 4 = x$.

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x^2-2\cdot x+4)\text{-}3} + 1 = \sqrt{(x^2-2\cdot x+4)} + 1 = \sqrt{(x-1)^2} + 1 =$$
$$x-1+1 = x.$$

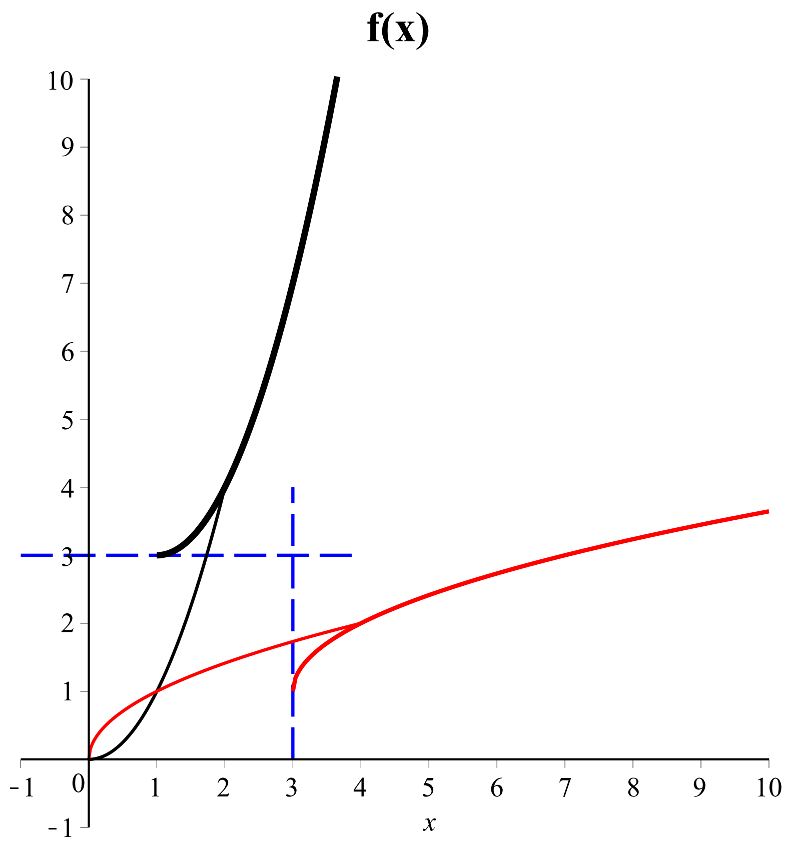


fig. 2

Nu kan vi se generelt på parallelforskydning af grafen for en funktion.

Her er en sætning for parallelforskydning af en graf. Beviset for sætningen er i Appendiks sidst i artiklen.

Grafen forskydes a i x-retning og b i y-retning .

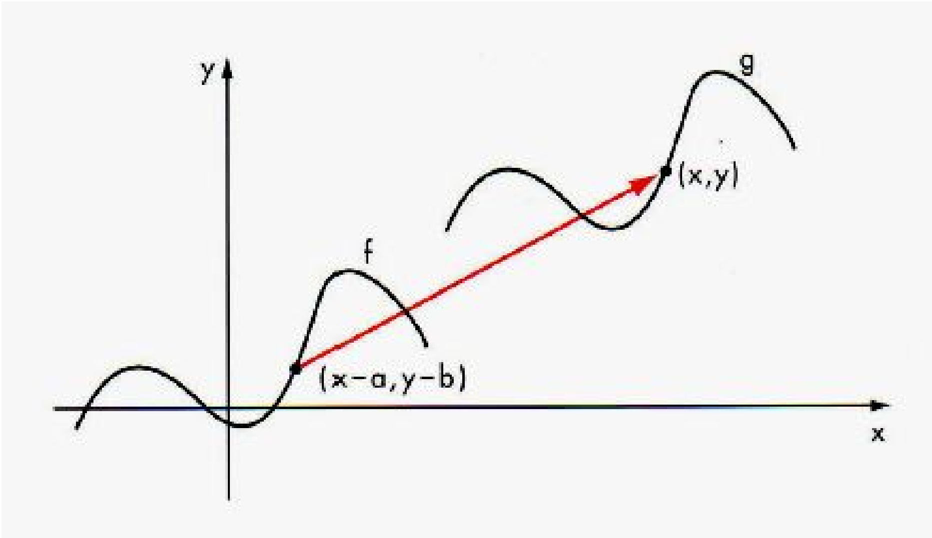


fig. 3

Sætning 1 Parallelforskydning af grafen for funktioner i een reel variabel

Forskriften for den funktion g, hvis graf er en parallelforskydning $(a\,,b)$ af grafen for f, er givet ved:

$$\boldsymbol{g(x) = f(x - a) + b}$$

Sætningen gælder generelt, for alle funktioner. Men vi nøjes med at se på 2-gradsfunktioner.

Ssom eksempel har vi, den funktion vi så på ovenfor:

$f(x) = x^2$ og $g(x) = f(x-1) + 3 = (x-1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4$

Nu kan vi se mere generelt på 2-gradsfunktioner i forhold til, at finde den inverse funktion på en nem og hurtig måde. Tidligere så vi hvordan vi fandt toppunktet for en 2-gradsfunktion, og hvordan koordinaterne for toppunktet gjorde det nemt at finde den inverse.

Nu vil vi generalisere mere. Efter det bliver det helt enkelt, at opskrive den inverse til en 2-gradsfunktion.

$a \neq 0$

$y \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$= \quad a \cdot \left[x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right]$$

$$= \quad a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \frac{b^2}{4 \cdot a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

$$= \quad a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \frac{b^2}{4 \cdot a^2} + \frac{4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2} \right]$$

$$= \quad a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2} \right]$$

$$= \quad a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a}$$

$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$$= \quad a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \frac{d}{4 \cdot a}$$

$(\alpha , \beta) = (x , y) = \left(-\frac{b}{2 \cdot a} \; , \; -\frac{d}{4 \cdot a} \right)$

er koordinaterne for toppunktet.

$$= \quad a \cdot (x + \alpha)^2 + \beta$$

dvs. $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ har toppunkt i $(x , y) = (\alpha , \beta) = \left(-\frac{b}{2 \cdot a} \; , \; -\frac{d}{4 \cdot a} \right)$

Af $y = a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a} \right)^2 - \frac{d}{4 \cdot a}$, ses sammenhængen mellem toppunktskoordinaterne og

parallelforskydning af grafen for $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, tydeligt.

Når vi har en 2-grads funktion $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, og kender toppunktet (α , β), kan vi umiddelbart finde den inverse funktion :

Sætning 1 giver, at enhver 2-gradsfunktion er en parallelforskydning af $y = a \cdot x^2$ fra toppunktet $(0 , 0)$ til topunktet for $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$,

givet ved

$$y = a \cdot (x - \alpha)^2 + \beta .$$

Nu kan den inverse funktion let findes :

$$a \cdot (x-\alpha)^2 = y-\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-\alpha)^2 = \frac{y-\beta}{a}$$

Men for at kunne tage kvadratroden, skal vi være sikre på, at udtrykket på højre side, er positivt eller 0.

$$\frac{y-\beta}{a} \geq 0 \quad (\aleph)$$

Der er to tilfælde:

I: $y \geq \beta \ \wedge \ a > 0$, Når $a > 0$ vender "grenene" på grafen (parablen) opad.
Dermed er ($\aleph$) notorisk sand.

II: $y \leq \beta \ \wedge \ a < 0$, Når $0 < a$ vender "grenene" på grafen (parablen) nedad.
Dermed er ($\aleph$) notorisk sand.

Derfor kan vi roligt udføre kvadratrodsuddragningen.

for $x \geq \alpha$: $\quad x-\alpha = \sqrt{\frac{y-\beta}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{y-\beta}{a}} + \alpha$

for $x \leq \alpha$: $\quad x-\alpha = -\sqrt{\frac{y-\beta}{a}} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{\frac{y-\beta}{a}} + \alpha$

Dermed har vi alle løsninger, når vi skal finde den inverse til en 2-gradsfunktion.
Vi skal blot indsætte koordinaterne for toppunktet og værdien for a.

Og vi skal have bestemt os for, om vi vil vælge den højre eller venstre gren af parablen som vores injektive funktion.

Dermed har vi fundet en sætning, som jeg ikke har set før:

Sætning 2 **Den inverse funktion til en 2-gradsfunktion** $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\,,\ \ a \neq 0\,.$

Find toppunktet for funktionen $(x\,,y) = (\alpha\,,\beta) = \left(-\frac{b}{2 \cdot a}\ ,\ -\frac{d}{4 \cdot a} \right)$

Hvis der vælges den injektive funktion $x \geq \alpha$:

er den inverse funktion $x = \sqrt{\frac{y - \beta}{a}} + \alpha$

Hvis der vælges den injektive funktion $x \leq \alpha$:

er den inverse funktion $x = -\sqrt{\frac{y - \beta}{a}} + \alpha$

Efter variabelbytte: $y = \sqrt{\frac{x - \beta}{a}} + \alpha$, henholdsvis $y = -\sqrt{\frac{x - \beta}{a}} + \alpha$

Et par eksempler:

eks 3

$y = x^2 - 2 \cdot \mathrm{x} + 4$ og $\mathrm{x} \leq \alpha$

$(\alpha\,,\beta) = (1\,,3)$ og sætning 2 giver os $x = -\sqrt{\frac{y - 3}{1}} + 1 = -\sqrt{y - 3} + 1$

$y = -\sqrt{x - 3} + 1$, se grafen fig. 4

f(x)

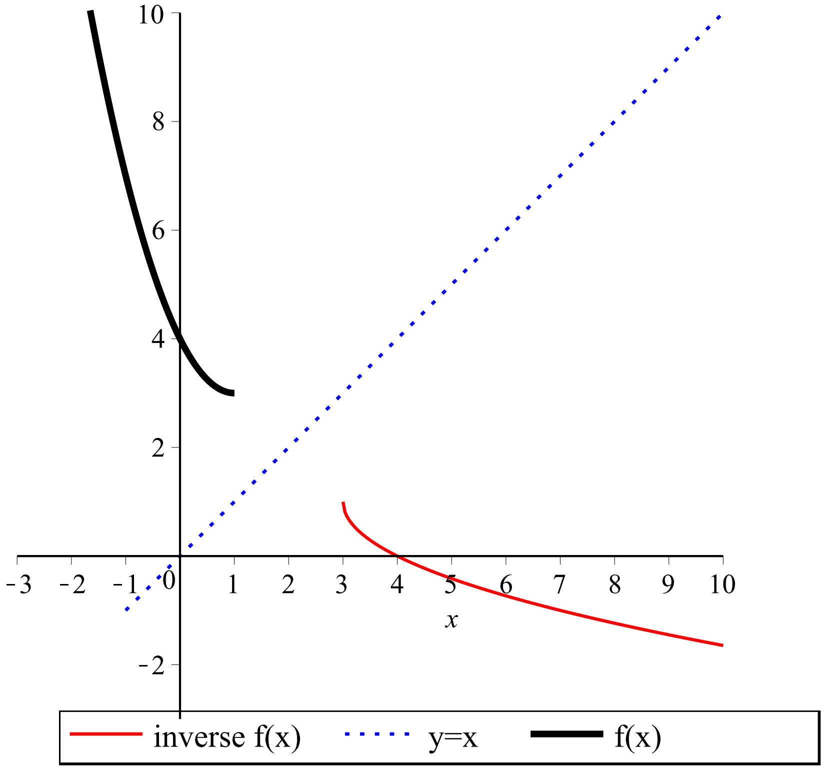


fig. 4

eks 4

$$y = -(x-2)^2 - 3 = -\left(x^2 - 4 \cdot x + 4\right) - 3 = -x^2 + 4 \cdot x - 7$$

$(\alpha, \beta) = (2, -3)$, vi vælger $x \geq \alpha$, og sætning 2 giver os

$$x = \sqrt{\frac{(y - (-3))}{-1}} + 2 = \sqrt{-y-3} + 2$$

$y = \sqrt{-x-3} + 2$, se grafen fig. 5

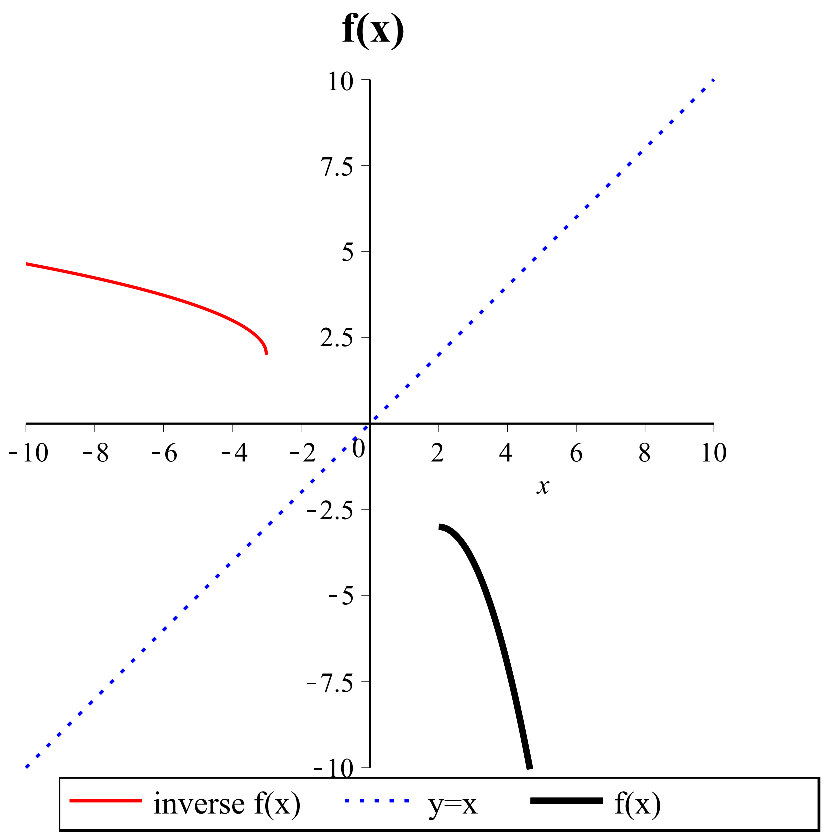


fig. 5

Øvelser

På næste side følger 3 øvelser. Udfør disse 6 punkter:

1) Find toppunktet (α ,β)

2) Skitsér grafen.

3) Vælg definitionsmængde for din injektive funktion.

4) Indsæt (α ,β) i sætning 2 .

5) Foretag variabelbytte og gør prøve (sammensæt f og f^{-1}) .

6) Tegn grafen for $f^{-1}(x)$.

Ø1: $y = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + x + \frac{5}{2}$

Ø2: $y = 2 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 22$

Ø3: $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot x - 3$

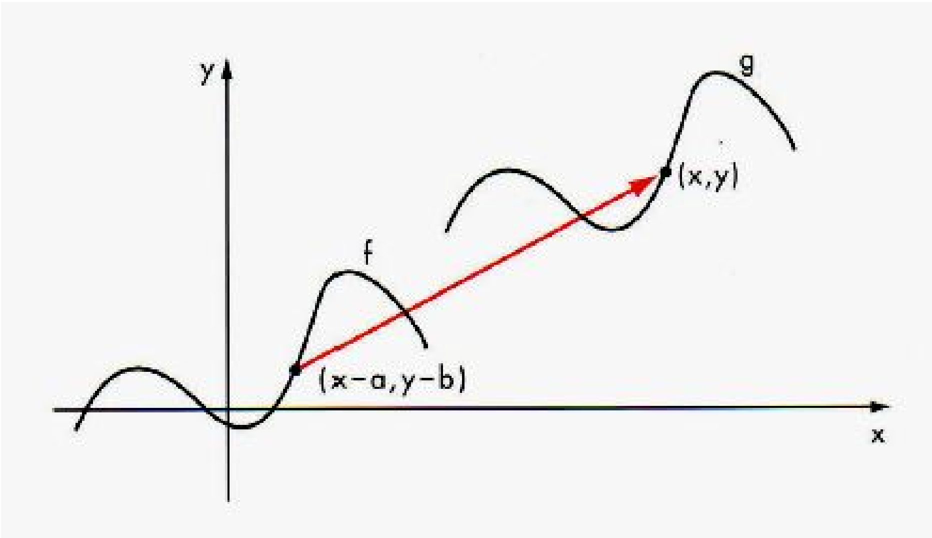
Appendiks

Bevis for sætning 1

Sætning 1	**Parallelforskydning af grafen for funktioner i een reel variabel**

Forskriften for den funktion g, hvis graf er en parallelforskydning (a, b) af grafen for f, er givet ved:

$$g(x) = f(x - a) + b$$



Bevis:

Generelt gælder det. Når man skal finde forskriften for den funktion, $g(x)$, hvis graf er en parallelforskydning af grafen for f med (a, b),
(Grafen forskydes a i x-retning og b i y-retning), så fås:

$$y = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \star$$

$$(x, y) \in \text{grafen for } g \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - a, y - b) \in \text{grafen for } f \quad \Leftrightarrow$$

$$y - b = f(x - a) \quad \Leftrightarrow$$

$$y = f(x - a) + b \quad \star\star$$

Ved sammenligning af $\star$ og $\star\star$ får vi, at forskriften for $g(x)$ er:

$$g(x) = f(x - a) + b$$

□