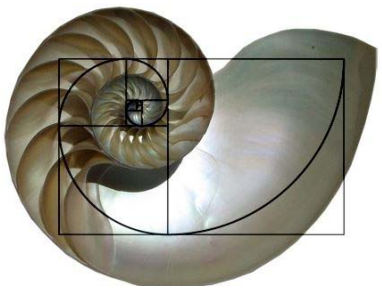
Fibonacci følgen og Det gyldne snit

af John V. Petersen

Indhold

Fibonacci	.....	2
Fibonacci følgen og Binets formel	.....	3
Det gyldne snit φ	.....	4
Fibonacci følgen og Det gyldne snit	.....	6
Fibonacci følgen og konvergens mod φ	.....	6
Bevis for Binets formel	.....	7
Binets formel fortæller os, at ...	.....	9
Bevis for konvergens mod φ	.....	10

φ



Fibonacci følgen

Fibonacci (1170-1250)

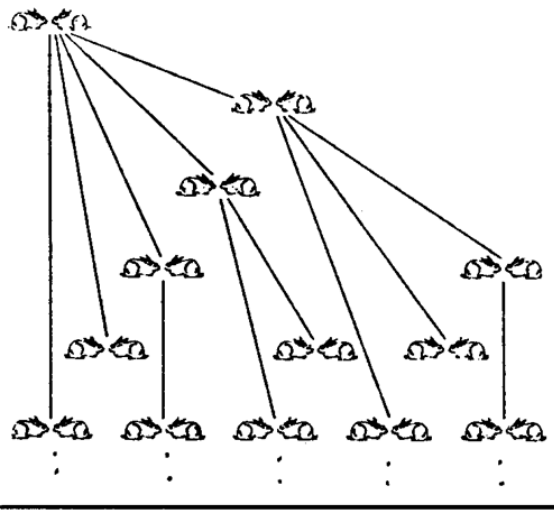
Leonardo af Pisa, også kendt som Fibonacci, der er en forkortelse af Figlio di Bonacci, søn af Bonacci. Han skrev i 1202 bogen ”Liber abaci”, der nu kendes i en håndskrevet afskrift fra 1228.

”Liber abaci” er en omfattende bog og var især beregnet for mennesker der skulle udføre praktiske beregninger, f.eks. handelsmænd.

Den indeholder den aritmetiske og algebraiske viden man havde på den tid, og kom dermed til at spille en afgørende rolle for matematikkens udvikling i Europa, i de følgende århundreder. Mod den tids sædvane, er der i bogen overalt benyttet arabertal, hvorfor den ofte opfattes som ”skyldig” i, at vi i dag anvender arabertal.
Det menes også, at det var Fibonacci, der indførte brøkstregen.

Liber abaci indeholder en lang række problemer og deres løsning. Et af problemerne ser, lidt omskrevet, således ud:
En kaninbestand består fra begyndelsen af et kønsmodent par. Hver kønsmodent par føder et nyt par hver måned, og kaninerne bliver kønsmodne en måned efter fødslen. Hvordan vokser antallet af kaninpar efterhånden som månederne går?

Skemaet nedenfor illustrerer situationen for de første seks måneder

Måned nr.	Kaninpar	Antal nye par	Antal par ialt
0		0	1
1		1	2
2		1	3
3		2	5
4		3	8
5		5	13
:		:	:

Det er løsningen af dette problem, der skaber Fibonaccitallene, og disse er for de første tolv måneder angivet i Liber abaci.

Vi vil først bestemme Fibonaccitallene, og senere se på nogle af deres egenskaber, sammenhænge med andre områder. Der er nemlig mange.
(Een egenskab, er en tæt sammenhæng med Det gyldne snit. Det gyldne snit defineres og udregnes

på side 4 , og sammenhængen bevises på side 10).

Hvis man fortsætter skemaet, opdager man, at de to talkolonner til højre vokser på samme måde. Hvorfor vi kan nøjes med, at betragte den ene. Det er traditionelt kolonnen under nye par, fra og med måned nr 1:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..

Det er denne følge af tal, der kaldes Fibonaccifølgen, mens det enkelte tal kaldes et Fibonaccital. Det slår vi fast i en definition.

Definition. **Ved Fibonaccifølgen** forstås den følge af tal F_1, F_2, F_3, **...** , F_n , **...**
hvor $F_1 = F_2 = 1$, og det for $n > 1$ gælder , at

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \ .$$

F_n kaldes det n'te **Fibonaccital.**

Fibonaccitallene vokser ret hurtigt, hvilket fremgår af skemaet nedenfor:

$F_1 = 1$	$F_2 = 1$	$F_3 = 2$	$F_4 = 3$	$F_5 = 5$
$F_6 = 8$	$F_7 = 13$	$F_8 = 21$	$F_9 = 34$	$F_{10} = 55$
$F_{11} = 89$	$F_{12} = 144$	$F_{13} = 233$	$F_{14} = 377$	$F_{15} = 610$
$F_{16} = 987$	$F_{17} = 1597$	$F_{18} = 2584$	$F_{19} = 4181$	$F_{20} = 6765$

Skal man bestemme f.eks. F_{50} er det et ret stort arbejde $F_{21} = F_{19} + F_{20}$, *osv.* ...
Imidlertid findes der en formel, der netop angiver det n' te Fibonaccital :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Formlen kaldes Binets formel, og er opkaldt efter en fransk matematiker og fysiker, der levede 1786 - 1856. Han fandt i 1843 denne overraskende formel. Senere gives et bevis for Binets formel.

Jeg nævnte ovenfor, at der er en tæt sammenhæng mellem Fibonaccitallene og Det gyldne snit. Så nu er det på tide at definere og udregne Det gyldne snit.

Det gyldne snit

Hvad er det gyldne snit?

1. en måde at dele et linjestykke på.
2. nogle linjer/snit i en billedflade.
3. en form på et rektangel.
4. et tal (φ).

Der skelnes ikke altid mellem ovenstående tilfælde.

Det forhold, linjestykket deles i, mellem snittene i billedfladen, mellem siderne på rektanglet,

betegner vi med det græske bogstav (phi) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Historisk set stammer det gyldne snit fra de gamle grækere. En konstruktion af snittet findes f.eks. i Euklids Elementer II.11 . Og i en anekdote fortælles det, om Eudoxos 420-355 f.kr., (han var matematiker og elev af Platon), at han en dag gik rundt med en stok, og bad de forbipasserende om at sætte et hak i stokken på det sted, de mente, at stokken ville blive delt på den mest harmoniske måde. Da der var sat en række mærker, kunne han ikke undgå at bemærke, at de samlede sig om ét punkt, nemlig det der senere blev kendt som det gyldne snit.

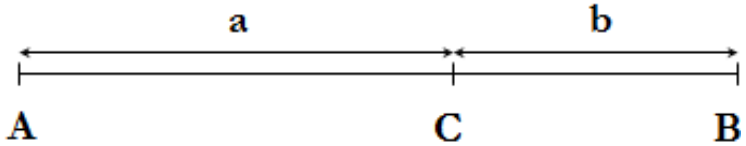
Første gang det fremgår, at man åbenbart synes, der er noget specielt ved det gyldne snit, er i bogen *"En beundringsværdig geometrisk frembringelse"* af Campus (ca. 1250 e. Kr.). Senere følger i 1509 en af de oftest citerede bøger om emnet, nemlig *"De divina proportione"* (Den guddommelige brøk) af Luca Pacioli (ca. 1445 - 1514).
Man regner med, at navnet *"Det gyldne snit"* stammer fra 1835, hvor en tysk matematiker måske blandede to ting, nemlig: regula *aurera* (den *gyldne* regel) [metode fra handelsregning] og *secho* devina (guddommelige *snit*). Siden er det i Tyskland og Norden blevet kladt *det gyldne snit*, mens det andre steder oftest kaldes *"den guddommelige brøk"* engelsk *"the divine proportion"*.

Lad os nu definere *det gyldne snit*.

Definition. Hvis det om linjestykket AB gælder, at det er delt af punktet C, så

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \ ,$$

siges C at dele linjestykket AB i ***det gyldne snit.***



Lidt mere populært kan definitionen udtrykkes sådan:

$$\frac{\textit{hele linjestykket}}{\textit{det største stykke}} = \frac{\textit{det største stykke}}{\textit{det mindste stykke}}$$

Forholdet i det gyldne snit udtrykker også, at a er mellemproportional til $a+b$ og b.

Nu vil vi udregne forholdet $\frac{a}{b}$, og vi vil betegne det med bogstavet $\varphi = \frac{a}{b}$.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \quad (\mathbf{1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \quad \text{da } a \text{ og } b \text{ er længder, er det kun den positive løsning, der kan bruges.}$$

dvs. det er tallet, forholdet $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kaldes Det gyldne snit.

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034\ldots$, og vi vil betegne $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ med $\tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Bemærk: Da φ og $\tilde{\varphi}$ er rødder i (**1**) gælder der, at:

$$\begin{matrix} \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \\ \tilde{\varphi}^2 - \tilde{\varphi} - 1 = 0 \end{matrix} \qquad (\mathbf{2})$$

Desuden ses det, at Binets formel nu kan skrives enklere. Og det giver et første fingerpeg om, hvad Fibonaccitallene har at gøre med Det gyldne snit.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi)^n - (\tilde{\varphi})^n \right]$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \tilde{\varphi}^n \right)} \qquad \mathbf{(3)}$$

Vi betragter nu Fibonaccifølgen

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...,

og tager nu i rækkefølge Fi-tallene og dividerer med det nærmest foregående Fi-tal:

n	Fn	Fn+1/Fn
1	1	
2	1	1,000000
3	2	2,000000
4	3	1,500000
5	5	1,666667
6	8	1,600000
7	13	1,625000
8	21	1,615385
9	34	1,619048
10	55	1,617647
11	89	1,618182
12	144	1,617978
13	233	1,618056
14	377	1,618026
15	610	1,618037
16	987	1,618033
17	1597	1,618034
18	2584	1,618034
19	4181	1,618034
20	6765	1,618034

Det ser ud til, at følgen $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ konvergerer hurtigt mod

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034\ldots$$

allerede ved det 16. element i denne følge, er der en nøjagtighed på 6 decimaler.

Men for at være sikre på konvergensen, må vi bevise følgende sætning, helt stringent:

Sætning 1 Idet F_n er det n'te Fibonaccital, gælder det, at

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi \quad \textbf{for } n \rightarrow \infty .$$

Men før vi beviser konvergensen af Fibonaccitallene, må vi bevise Binets formel, da den bruges i beviset for konvergensen.

Sætning 2 Binets formel.

Det n'te Fibonaccital F_n, er for alle $n \in \mathbb{N}$ bestemt ved

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Vi skal bruge nogle sammenhænge til beviset:

For fibonaccifølgen gælder netop, at $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

Fra **(3)** side 5, har vi, at $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi)^n - (\tilde{\varphi})^n \right]$

og fra **(2)** side 5, har vi, at

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\tilde{\varphi}^2 - \tilde{\varphi} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\varphi}^2 = \tilde{\varphi} + 1$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}$$

$$\tilde{\varphi}^{n+1} = \tilde{\varphi}^n + \tilde{\varphi}^{n-1} \qquad \textbf{(4)}$$

Vi vil bevise Sætning 2 ved et induktionsbevis.
Beviset udføres i tre trin:

1. Vi viser, at formlen er sand for n = 1 og for n = 2

2. Vi antager så, at formlen er sand for n og (n - 1)

3. Vi viser, at (formlen er sand for n og (n - 1)) $\Rightarrow$ (formlen er sand for (n + 1)

1. er induktionsstarten.
2. er induktionsantagelsen.
3. er induktionsskridtet.

Bevis.

1. Ved indsættelse i formlen, får vi:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5} \;-1\; +\sqrt{5}}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1, \quad F_1 = 1$$

$$og \quad F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi)^2 - (\tilde{\varphi})^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi + 1) - (\tilde{\varphi} + 1) \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\varphi - \tilde{\varphi} \right]$$
$$= 1, \quad F_2 = 1$$

2. Vi har vist **1.** , og antager nu at formlen er sand for n og (n - 1)

3. Vi har som forudsætning, fra **2.** , at formlen er sand for n og (n - 1) .
Vi skal nu vise, at det medfører, at formlen også er sand for (n + 1):

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi)^n - (\tilde{\varphi})^n \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi)^{n-1} - (\tilde{\varphi})^{n-1} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left((\varphi)^n + (\varphi)^{n-1} \right) - \left((\tilde{\varphi})^n + (\tilde{\varphi})^{n-1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi)^{n+1} - (\tilde{\varphi})^{n+1} \right] \quad \textbf{(4)}$$

dvs. $$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\varphi)^{n+1} - (\tilde{\varphi})^{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \qquad \square$$

Binets formel $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(\varphi)^n - (\tilde{\varphi})^n \right]$ fortæller os, at

$$F_n \rightarrow \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \quad \textbf{for } n \rightarrow \infty \quad \text{, da} \quad |\tilde{\varphi}| < 1$$

$F_{10} = 55$, hvor $\frac{\varphi^{10}}{\sqrt{5}} \approx 55{,}0036...$

$F_{11} = 89$, hvor $\frac{\varphi^{11}}{\sqrt{5}} \approx 88{,}998...$

...

...

...

$F_{14} = 377$, hvor $\frac{\varphi^{14}}{\sqrt{5}} \approx 377{,}0005305...$

...

Nu kan vi bevise Sætning 1

Sætning 1 Idet F_n er det n'te Fibonaccital, gælder det, at

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \varphi \quad \textbf{for } n \rightarrow \infty .$$

I beviset får vi brug for nogle sammenhænge:

$$\begin{matrix} 1 < \varphi \\ |\tilde{\varphi}| < 1 \end{matrix} \qquad \text{hvilket medfører, at}$$

$$\varphi^n \rightarrow \infty \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

$$\tilde{\varphi}^n \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

og

$$\frac{\tilde{\varphi}^{n+1}}{\varphi^n} \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

$$\frac{\tilde{\varphi}^n}{\varphi^n} \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

Bevis

$1 \le n$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi)^{n+1} - (\tilde{\varphi})^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi)^{n} - (\tilde{\varphi})^{n}\right)} = \frac{(\varphi)^{n+1} - (\tilde{\varphi})^{n+1}}{(\varphi)^{n} - (\tilde{\varphi})^{n}}$$

$$= \frac{\frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} - \frac{\tilde{\varphi}^{n+1}}{\varphi^n}}{\frac{\varphi^n}{\varphi^n} - \frac{\tilde{\varphi}^n}{\varphi^n}} = \frac{\varphi - \frac{\tilde{\varphi}^{n+1}}{\varphi^n}}{1 - \frac{\tilde{\varphi}^n}{\varphi^n}} \rightarrow \frac{\varphi - 0}{1 - 0} = \varphi \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

□