Biologisk model: Epidemi

af John V. Petersen

1. Biologisk model: Epidemi .... si. 1

A. Appendiks
A 1. Ligninger si. 1, forklaring .... si. 9
A 2. Egenvektorer $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$ .... si. 10
A 3. Bevis for Sætning 1, si. 6 .... si. 11
A 4. Vise sammenhængen $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{x}_0$ .... si. 12

Eksempel på model der beskriver udviklingen for en epidemi. Den kan bruges til at finde en estimeret fordeling for raske, syge, døde og helbredte i en population. Det gøres udfra en startfordeling for disse grupper.

Til at løse problemet vil vi bruge matricer. Vi får igen brug for at diagonalisere en matrix. Desuden for vi brug for gentagne potensopløftninger af matricen. Og det er netop meget meget nemmere, når matricen er diagonaliseret.

I en population betragtes en epidemi af en smitsom sygdom. Populationen tænkes opdelt uge for uge i 4 grupper: raske, syge, døde og helbredte (og, antager vi, dermed immune).

Variable

- r_t : raske i uge t
- s_t : syge i uge t
- d_t : døde i uge t
- h_t : helbredte i uge t

Antagelser

- En rask har 20 % risiko for at blive syg efter en uge
- En syg har 10 % risiko for at dø efter en uge
- En syg har 20 % chance for at være helbredt efter en uge

Ligninger

$$r_{t+1} = 0.8\, r_t$$

$$s_{t+1} = 0.2\, r_t + 0.7\, s_t$$

(**Se forklaring i Appendiks A 1, si. 9**)

$$d_{t+1} = 0.1\, s_t + d_t$$

$$h_{t+1} = 0.2\, s_t + h_t$$

Ligninger på matrixform

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ s_{t+1} \\ d_{t+1} \\ h_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{bmatrix}$$

Kompakt notation

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t$$

Hvis $\boldsymbol{A}$ er diagonaliserbar, så ved vi, fra artikel **a.** ovenfor, at der findes en regulær matrix $\boldsymbol{P}$ så søjlerne i $\boldsymbol{P}$ netop er egenvektorerne hørende til egenværdierne for $\boldsymbol{A}$. Matricen $\boldsymbol{P}$ diagonaliserer $\boldsymbol{A}$, og $\boldsymbol{P}$ er netop basisskiftematricen hørende til basisskiftet fra den naturlige basis til basen bestående af egenvektorer for $\boldsymbol{A}$.

Vi finder først egenværdierne for matricen **A**, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *og* λ_4 samt de tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$.
Så kan vi diagonalisere $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}$

Vi lader $\boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{bmatrix}$, og betragter modellen

$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t$, hvor matricen $\boldsymbol{A}$ er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Modellen kan også skrives som $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{x}_0$

Vi skal nu bestemme egenværdier og egenvektorer for ***A***, og diagonalisere ***A***.
Det vil vi så bruge til at forudsige, hvad der sker i det lange løb i epidemimodellen.

Bestemmelse af egenværdier:

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = det \begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 - \lambda & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 - \lambda & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 - \lambda \end{bmatrix}$$

Da $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})$ er en nedre trekantsmatrix, gælder

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = (0.8 - \lambda)(0.7 - \lambda)(1.0 - \lambda)(1.0 - \lambda)$$

og egenværdierne findes til

$$\lambda_1 = 0.8\ , \quad \lambda_2 = 0.7\ , \quad \lambda_3 = 1.0 \quad \text{(dobbeltrod)}$$

Bestemmelse af egenvektorer:

Vi vil finde egenvektorerne $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$ hørende til egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *og* λ_4 .

Det gør vi ved at finde nulrummet for matricen $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$, dvs. løse $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$$

$$For \quad \lambda_1 = 0.8: \text{ Vi finder nulrummet for } \boldsymbol{A} - 0.8\,\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & -0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{A} - 0.8\,\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.2 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.2 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0 \end{array}\right]$$

I den nederste række, ses det, at $t \cdot (-1) = x_2 \quad og \quad t \cdot 1 = x_4$
I række 3, ses det desuden, at $t \cdot 0.5 = x_3$
Og i række 2, ses det så, at $t \cdot (-0.5) = x_1$

Så egenvektorerne hørende til $\lambda_1 = 0.8$ er $t \cdot \boldsymbol{q}_1$, hvor

$$\boldsymbol{q}_1 = (-0.5,\ -1.0,\ 0.5,\ 1.0)^T$$

Tilsvarende er egenvektorerne hørende til $\lambda_2 = 0.7$ er $t \cdot \boldsymbol{q}_2$, hvor

$$\boldsymbol{q}_2 = (0.0,\ -1.5,\ 0.5,\ 1.0)^T$$

Egenvektorerne hørende til $\lambda_3 = 1.0$ er $t_1 \cdot \boldsymbol{q}_3 + t_2 \cdot \boldsymbol{q}_4$, hvor

(Se udregning af q_3 og q_4 i Appendiks A 2, si. 10)

$\boldsymbol{q}_3 = (0.0,\ 0.0,\ 1.0,\ 0.0)^T$ og $\boldsymbol{q}_4 = (0.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 1.0)^T$

De fire egenvektorer $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$ er lineært uafhængige og dermed er $\boldsymbol{A}$ diagonaliserbar.

Vi har $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$ og $\mathbf{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}$

hvor

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Vi prøver lige om vi har regnet rigtigt:

Vi udfører matrixmultiplikationen $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.333\ldots & -0.666\ldots & 0.0 & 0.0 \\ 0.333\ldots & 0.333\ldots & 1.0 & 0.0 \\ 0.666\ldots & 0.666\ldots & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.333\ldots & -0.666\ldots & 0.0 & 0.0 \\ 0.333\ldots & 0.333\ldots & 1.0 & 0.0 \\ 0.666\ldots & 0.666\ldots & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.800000000000000044 & 0. & 0. & 0. \\ 0.200000000000000400 & 0.699999999999999845 & 0. & 0. \\ -1.11022302462515654\ 10^{-16} & 0.100000000000000061 & 1. & 0. \\ -2.22044604925031308\ 10^{-16} & 0.200000000000000122 & 0. & 1. \end{bmatrix} \approx$$

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

dvs. $\mathbf{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$ OK.

Vi vil nu se på, hvad der sker i det lange løb i vores epidemimodel:

Først vil jeg minde om følgende:

Sætning 1

$A^t = P\,\mathrm{D}^t P^{-1}$, for $t \geq 1$ **(1)** (**Se Bevis for sætning 1 i Appendiks A 3, si. 11**)

• x_0 er startfordelingen af raske, syge, døde og helbredte.

• Vi anvender matricen A^t på x_0 :
Vi har fra tidligere $x_{t+1} = A\,x_t$. Når vi nu anvender matricen A^t på x_0 , får vi tilsvarende $x_t = A^t x_0$.
(**Se evt. i Appendiks A 4, si. 12**)

dvs. $x_t = A^t x_0 \; = \; P\,\mathrm{D}^t P^{-1} x_0$

• D er en diagonalmatrix, så

$$\mathrm{D}^t = \begin{bmatrix} 0.8^t & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7^t & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0^t & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0^t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{t \to \infty} x_t \; = \; \lim_{t \to \infty} A^t x_0 \; = \; P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} x_0 \; , \quad \text{har brugt } \mathbf{(1)}$$

Dvs.

$$x_t \; = \; A^t x_0 \; \to \; P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} x_0 \qquad \text{for } t \to \infty$$

$$\boldsymbol{x}_t \to \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.333\ldots & -0.666\ldots & 0.0 & 0.0 \\ 0.333\ldots & 0.333\ldots & 1.0 & 0.0 \\ 0.666\ldots & 0.666\ldots & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.333333333333333315 & 0.333333333333333370 & 1.0 & 0. \\ 0.666666666666666630 & 0.666666666666666741 & 0. & 1.0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0$$

$$= \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.333333333333333315 & 0.333333333333333370 & 1.0 & 0. \\ 0.666666666666666630 & 0.666666666666666741 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \\ d_0 \\ h_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.333333333333333315 \cdot r_0 + 0.333333333333333370 \cdot s_0 + 1.0 \cdot d_0 \\ 0.666666666666666630 \cdot r_0 + 0.666666666666666741 \cdot s_0 + 1.0 \cdot h_0 \end{bmatrix} \quad \text{for } t \to \infty$$

dvs.

$$\boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.333333333333333315 \cdot r_0 + 0.333333333333333370 \cdot s_0 + 1.0 \cdot d_0 \\ 0.666666666666666630 \cdot r_0 + 0.666666666666666741 \cdot s_0 + 1.0 \cdot h_0 \end{bmatrix} \quad \text{for } t \to \infty$$

Resultatet fra forrige side:

$$\boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.33333333333333315 \cdot r_0 + 0.33333333333333370 \cdot s_0 + 1.0 \cdot d_0 \\ 0.66666666666666630 \cdot r_0 + 0.66666666666666741 \cdot s_0 + 1.0 \cdot h_0 \end{bmatrix} \quad \text{for } t \rightarrow \infty$$

Eller:

$$\boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \cdot \left(r_0 + s_0 \right) + d_0 \\ \frac{2}{3} \cdot \left(r_0 + s_0 \right) + h_0 \end{bmatrix} \quad \text{for } t \rightarrow \infty$$

Bemærk, at efter denne model vil der efter t uger (t er stor), være udelukkende helbredte (immune raske) eller døde. Der er ingen raske (ikke immune) som kan blive syge igen, og ingen der vedbliver at være syge.
Dvs. alle i populationen er blevet smittet og blevet syge. Og efter t uger er de enten døde eller helt helbredte (immune), ift. lige præcis denne smitsomme sygdom.

En estimeret fordeling $\boldsymbol{x}_t$ udfra en startfordeling $\boldsymbol{x}_0$:

Nu kan vi, udfra en startfordeling af raske, syge, døde og helbredte, nemt udregne hvilken fordeling af disse grupper der er, *t* uger efter starttidspunktet:

$$\text{Hvis } \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \\ d_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{da gælder} \quad \boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} r_t \\ s_t \\ d_t \\ h_t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 33 \\ 67 \end{bmatrix} \quad \text{for } t \rightarrow \infty$$

Dvs. hvis vi har en **startfordeling med 100 raske**, og ingen syge, døde eller helbredte, så vil der **efter t uger** (hvor t er stor) være **33 døde** og **67 helbredte** i denne population.

A. Appendiks

A 1. Ligninger si. 1, forklaring

Ligningerne for ugen $(t + 1)$ er er opstillet, så vi går ud fra en tilfældig uge t, og ser hvilken fordeling af raske, syge, døde og heldredte der så er en uge efter.

Antagelser

- En rask har 20 % risiko for at blive syg efter en uge
- En syg har 10 % risiko for at dø efter en uge
- En syg har 20 % chance for at være helbredt efter en uge

De helbredte, antager vi, er blevet immune.

Hvis vi starter i uge 0, er ligningerne ret simple:

$r_1 = 0.8\, r_0$: Ved start uge 0, er alle i populationen raske. Ingen er syge, døde eller helbredte set ift. epidemien.
Fra uge 0 til uge 1, er der 20 % som bliver syge $\rightarrow\; r_1 = 0.8\, r_0$

$s_1 = 0.2\, r_0$: Efter den første uge , er der kun sket det, at 20 % raske er blevet syge $\rightarrow\; s_1 = 0.2\, r_0$

$d_1 = 0$: Der er kun gået een uge fra start i uge 0. Alt der er sket, er at 20 % er blevet syge.
Der er ikke gået en uge, hvor en syg kunne risikere at dø $\rightarrow\; d_1 = 0$

$h_1 = 0$: Som ovenfor: Der er ikke gået en uge mere, så nogen syge kan være blevet helbredt $\rightarrow\; h_1 = 0$

Men lad os nu se på, en tilfældig uge $(t + 1)$ med udgangspunkt i ugen tidligere, uge t :

$r_{t+1} = 0.8\, r_t$: Der er 20 % risiko for at blive syg efter en uge. Dvs. der er 20 % færre raske en uge efter $\rightarrow\; 0.8 \cdot r_t$

$s_{t+1} = 0.2\, r_t + 0.7\, s_t$: 20 % af de raske ugen før, er nu syge $\rightarrow\; 0.2\, r_t$
Ud af de, som var syge i uge t , er der 20 % som er helbredt, og 10 % som er døde $\rightarrow\; 0.7\, s_t$

$d_{t+1} = 0.1\, s_t + d_t$ De som var døde i uge t , er stadig døde $\rightarrow\; d_t$
Og der er 10 % af de syge i uge t , som er døde $\rightarrow\; 0.1\, s_t$

$h_{t+1} = 0.2\, s_t + h_t$ De som var helbredt i uge t , er immune, og derfor stadig helbredt $\rightarrow\; h_t$
Og der er 20 % af de syge i uge t , som ν er helbredt $\rightarrow\; 0.2\, s_t$

A 2. Egenvektorer $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$

Egenvektorerne hørende til dobbeltroden $\lambda_3 = 1.0$

$$[\boldsymbol{A} - 1.0\,\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.8 - 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.2 & 0.7 - 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.1 & 1.0 - 1.0 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 1.0 - 1.0 & 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} -0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.2 & -0.3 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0 \end{array}\right]$$

Det ses, umiddelbart at $x_1 = x_2 = 0$, $\quad x = \left(x_1 ,\ x_2 ,\ x_3 ,\ x_4 \right)^T$

x_3 og x_4 skal blot vælges, så $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$ er lineært uafhængige.
Og $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$ skal være lineært uafhængige.

Så vi kan blot vælge $\boldsymbol{q}_3$ til at være den "naturlige" basis $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{q}_3 = (0 ,\ 0 ,\ 1 , 0)^T$.
Og vi vælger tilsvarende $\boldsymbol{q}_4$ *til at være* $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{q}_4 = (0 ,\ 0 ,\ 0 , 1)^T$.

Egenvoktorerne $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$ er netop søjlerne i $\boldsymbol{P}$.

$$\text{Så} \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Da $\boldsymbol{P}$ er en nedre trekantsmatrix er determinanten af $\boldsymbol{P}$: det $(\boldsymbol{P}) = (-0.5)\cdot(-1.5)\cdot(1.0)^2 = 0.75 \neq 0$
$\Leftrightarrow$ at $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$ er lineært uafhængige.

Så vi har fundet lineært uafhængige egenvektorer $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$ inklusiv $\boldsymbol{q}_3$ og $\boldsymbol{q}_4$.

A 3. Bevis for Sætning 1, si. 6

Sætning 1

Lad $\boldsymbol{A}$ være en n $\times$ n matrix. Hvis $\boldsymbol{A}$ er diagonaliserbar, kan den skrives som:
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$, hvor $\boldsymbol{P}$ er en regulær matrix , og D er en diagonalmatrix .

Så gælder der, at $\boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^t\,\boldsymbol{P}^{-1}$, for $t \geq 1$, $t \in \mathbb{N}$.

Vi definerer forskriften: $p(t)$: $\boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^t\,\boldsymbol{P}^{-1}$, for $t \in \mathbb{N}$

$p(1)$: $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^1\,\boldsymbol{P}^{-1}$ (det er blot diagonaliseringen af $\boldsymbol{A}$ **:** $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$)

$p(t+1)$: $\boldsymbol{A}^{t+1} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^{t+1}\,\boldsymbol{P}^{-1}$

Bevis: Beviset føres som et **induktionsbevis**.

Hvis

- $p(1)$ *er sandt* [induktionsstarten]
- $p(t) \;\Rightarrow\; p(t+1)$ [induktionstrinnet]

så gælder $p(t)$ for alle $t \in \mathbb{N}$.

Hvis vi kan **vise**, at $p(1)$ er sandt.
Så **antage** at $p(t)$ er sandt. Og **derefter vise** $p(t) \;\Rightarrow\; p(t+1)$

Kan vi sluttelig **konkludere**, at $p(t)$ er sandt for alle $t \in \mathbb{N}$.

• $p(1)$: $\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{D}^1\,P^{-1}$. Induktionsstarten. Vi ved, at $p(1)$ er sandt. ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}\,\boldsymbol{P}^{-1}$) ✓

• Nu **antager vi:** $p(t)$ er sand . Vi skal så vise, at $p(t) \;\Rightarrow\; p(t+1)$ Induktionsskridtet.

Vi har givet: $\boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^t\,\boldsymbol{P}^{-1} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{P} = \mathbf{D}^t$. (Vi ved også, at $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \mathbf{D}$.)

$$\boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^{t+1}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{D}^t\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\;(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{P}\;)\,(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}\,)\;\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{P}\;\boldsymbol{P}^{-1})\,\boldsymbol{A}^t\,(\boldsymbol{P}\;\;\boldsymbol{P}^{-1})\,\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{P}\;\boldsymbol{P}^{-1}) = \boldsymbol{E}\,\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E} \quad (\aleph) \quad = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{t+1} \;. ✓$$

dvs. $\boldsymbol{A}^{t+1} = \boldsymbol{P}\,\mathbf{D}^{t+1}\boldsymbol{P}^{-1}$. [Vi har vist: Givet $p(t) \;\Rightarrow\; p(t+1)$]

Vi konkluderer: $p(t)$ er sandt for alle $t \in \mathbb{N}$. ✓ $\square$

$(\aleph)$ $\quad [\,(\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{A}^t)\;(\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^t\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}\,]$

A 4. Vise sammenhængen $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{x}_0$

Vi har fra tidligere (si. 2, øverst): $\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t$. **(1)**

Nu starter vi med $\boldsymbol{x}_0$ og anvender matricen $\boldsymbol{A}$ på $\boldsymbol{x}_0$:

Hvis vi i **(1)** sætter $t = 0$, har vi:

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}_2 = \left(A\,\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{x}_0\right)$$

dvs.

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{A}^3 \boldsymbol{x}_0$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\bullet$$

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{A}^t \boldsymbol{x}_0$$