

Biologisk model

af *John V. Petersen*

To arter lever i det samme økosystem: Vaskebjørne og egern.

Vi ser på vækstraterne af de to populationer, interaktionerne mellem de to populationer og finder en model der giver en prognose for udviklingen i tid for populationerne.

For at gøre det, må vi opstille et differentiallygningsystem:
2 koblede differentiallyninger af 1. orden

Det er rimeligt at antage, at vækstraten for hver art afhænger af størrelsen af begge populationer. (Selvfølgelig er der andre faktorer som påvirker væksten. Men vi vil gøre vores model simpel, ved at se bort fra disse.)

Hvis $x_1(t)$ og $x_2(t)$ betegner størrelsen af de to populationer til tiden t , så vil $x'_1(t)$ og $x'_2(t)$ være deres vækstrate til tiden t .

Vores model får følgende udseende:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \\x'_2(t) &= c \cdot x_1(t) + d \cdot x_2(t)\end{aligned}\tag{1}$$

hvor koefficienterne a , b , c og d afhænger af forholdene for de to arter i økosystemet.

Systemet (1) på matrix form:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \text{ eller } \mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Vaskebjørne og egern bebor det samme økosystem og konkurrerer om mad, vand og plads. Lad vaskebjørne og egern populationerne, til tiden t , være givet ved $r(t)$ henholdsvis $s(t)$. Ved fravær af egern, vil vaskebjørnenes vækst være $r'(t) = 2.5 \cdot r(t)$. Men når der er egern tilstede i økosystemet, vil den indbyrdes konkurrence bremse væksten af vaskebjørne til $r'(t) = 2.5 \cdot r(t) - s(t)$. På samme måde vil væksten af egern være $s'(t) = 2.5 \cdot s(t)$, ved fravær af vaskebjørne. Når der er vaskebjørne tilstede i økosystemet, vil den indbyrdes konkurrence her bremse væksten af egern til $s'(t) = -2.5 \cdot r(t) + 2.5 \cdot s(t)$.

Antag nu, at der til tiden $t = 0$, er 60 vaskebjørne og 60 egern i økosystemet. Og bestem hvad der sker med disse to populationer.

Vores system er :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \begin{bmatrix} r'(t) \\ s'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.0 \\ -0.25 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$

Vi kan

Vi opsl

Sætning

A er e

Der g

hvor λ

Så er

$\mathbf{x} = \mathbf{C}$

For at l

λ_1 og

Vi vil f

Det

$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

$$\lambda^2 - 5.0 \cdot \lambda + 6.0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 3 \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 2.$$

ricen **A**,

Nu vil vi finde egenvektorerne v_1 , v_2 hørende til egenverdierne λ_1, λ_2 .

Det gør vi ved at finde nulrummet for matricen $(A - \lambda I)$, dvs. løse $(A - \lambda I) \cdot x = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} -0.5 & -1.0 \end{bmatrix}$$

For

Ved

[

Så

Vi

Tils

Vha. S

$x(t) =$

Begynd

Så hv

$$C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix}, \text{ hvilket giver } C_1 = 15 \text{ og } C_2 = 45.$$

$$\mathbf{x}(t) = 15 \cdot e^{3 \cdot t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 45 \cdot e^{2 \cdot t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{heraf ses det, at}$$

$$r(t) = -30 \cdot e^{3 \cdot t} + 90 \cdot e^{2 \cdot t} \quad \text{og} \quad s(t) = 15 \cdot e^{3 \cdot t} + 45 \cdot e^{2 \cdot t}$$

Nedenfor ses graferne for disse to funktioner. Det ses tydeligt, at vaskebjørne populationen uddør lidt efter 1 år. Helt nøjagtigt uddør populationen efter: 1.0986 år.

$$(-30 \cdot e^{3 \cdot t} + 90 \cdot e^{2 \cdot t} = 0 \Leftrightarrow t = 1.098612289)$$

(1)

